Б. Н. ДЕЛОНЕ и Н. Н. САНДАКОВА

ТЕОРИЯ СТЕРЕОЭДРОВ

Введение

Если некоторые тела заполняют все пространства хотя бы и налегая друг на друга, т. е. так, что они могут иметь и общие внутренние точки, мы называем это заполнением пространства. Если же эти тела попарно не имеют общих внутренних точек, т. е. заполняют пространство однозначно, то мы называем их совокупность разбиением пространства. Если тела разбиения выпуклые, то они — многогранники, Разбиение на выпуклые многогранники со смежными целыми $(n-1)$-мерными гранями называется нормальным разбиением.

Разбиением пространства на стереоэдры называется такое разбиение, все тела (стереоэдры) которого равны или симметричны друг другу и каждый стереоэдр которого окружен всеми другими до бесконечности так же, как каждый другой из них. Под этим последним мы понимаем то, что, какие бы два стереоэдра разбиения ни взять, в группе G всех тех движений (1-го и 2-го рода), которые совмещают с собою это разбиение, есть хоть одно движение, при котором первый из этих стереоэдров переходит во второй. Разбиение пространства на стереоэдры называется иначе правильным или изоэдрическим.

Настоящая работа в основном выполнена совместно обоими авторами. Исключение составляют результаты § 1 и 2, которые принадлежат только первому автору, и результат § 4, принадлежащий только второму автору.

Хотя понятие о правильном разбиении пространства (reguläre Raumteilung, partition regulière de l'éspace) было давно в обиходе как у кристаллографов, так и у геометров, однако, если исключить случаи разбиения 2-мерной сферы, плоскости Эвклида, разбиения на области Дирихле n-мерного эвклидова пространства при условии, когда группой G является группа параллельных переносов, и разбиений 1-го рода плоскости Лобачевского, то, собственно, никакой общей теории таких разбиений до сих пор построено не было. Не был выяснен даже самый основной вопрос теории таких разбиений: верно ли, что для эвклидовых пространств число топологически разных таких разбиений всегда конечно.

В настоящей работе дается, во-первых, доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Число топологически различных нормальных правильных разбиений n-мерного эвклидова пространства меньше некоторого числа, зависящего только от числа n измерений этого пространства.*

Во-вторых, для любого n дается алгорифм для разыскания всех таких разбиений в том случае, если они суть разбиения Дирихле. Разбиение называется правильным разбиением Дирихле, если существует такая точка A, что его стереоэдры суть области Дирихле точек правильной системы точек $\{A_G\}$, где G — группа всех движений, совмещающих рассматриваемое разбиение с собою. Этот алгорифм также дает ответ на вопрос, при каких значениях метрических параметров группы G и при каких положениях точки A разбиение Дирихле будет топологически и метрически тем или другим.

Вся наша работа касается только разбиений эвклидова пространства, и мы все время применяем соображения эвклидовой геометрии.

Любопытно, что для случая 2-мерного эвклидова пространства вся теория может быть построена чисто топологически [1]. Надо думать, что это можно сделать для трехмерного эвклидова пространства и эвклидовых пространств высших измерений.

§ 1. Доказательство теоремы об ограниченности в зависимости от n числа топологически различных нормальных разбиений на стереоэдры n-мерного эвклидова пространства

Определим точно, какие разбиения мы называем топологически одинаковыми.

Два разбиения мы называем топологически одинаковыми, если имеется топологически изоморфное отображение одного из этих разбиений на другое, т. е. такое отображение, при котором совокупность стереоэдров первого разбиения взаимно однозначно отображается на совокупность стереоэдров второго разбиения, совокупность $(n—1)$-мерных граней первого взаимно однозначно отображается на совокупность $(n—1)$-мерных граней второго и т. д. и, наконец, совокупность вершин первого взаимно однозначно отображается на совокупность вершин второго, так что при этом все инцидентности сохраняются в обе стороны.

Перейдем теперь к определению понятия дуальной звезды правильного разбиения.

Рассмотрим дуальное к данному разбиение (дуальный клеточный комплекс), т. е. такое, что совокупность его вершин взаимно однозначно отображается на совокупность стереоэдров данного разбиения, совокупность его ребер взаимно однозначно отображается на совокупность $(n—1)$-мерных граней данного разбиения и т. д. и, наконец, совокупность его многогранников взаимно однозначно отображается на совокупности вершин данного разбиения так, чтобы сохранялись все инцидентности в обе стороны. Всякое ли метрическое нормальное правильное разбиение n-мерного эвклидова пространства имеет дуальное разбиение метрическое и нормальное, мы не знаем, поэтому приходится ограничиться дуальным разбиением, заданным чисто топологически. Звездой дуального разбиения называется совокупность всех его многогранников, сходящихся в некоторой фиксированной его вершине. Под заданием топологии дуальной звезды мы понимаем задание топологии реберной сетки каждого из многогранников и задание топологии смежностей этих многогранников в звезде.

Ввиду правильности данного разбиения, звезды всех вершин дуального разбиения топологически одинаковы.

Перейдем теперь к определению важного понятия «символ смежности данного правильного разбиения».

Если разбиение нормальное и правильное, то оно имеет вполне определенную полную группу G всех его отображений на себя. Эта группа имеет конечную подгруппу G_C таких отображений, при которых некоторый заданный стереоэдр S_C с центром тяжести C разбиения переходит в себя. Относительно этой группы G_C как отдельные $(n—1)$-мерные грани S_C могут быть эквивалентны друг другу, так и отдельные вершины одной и той же $(n—1)$-мерной грани S_C могут быть эквивалентны друг другу. Обозначим эквивалентные друг другу $(n—1)$-мерные грани одинаковыми буквами, например, a, a, . . . или b, b. . . и эквивалентные друг другу вершины одной и той же $(n—1)$-мерной грани — той же буквой, как эту грань с одинаковыми друг с другом индексами, например, b_3, b_3, ... Тогда, в силу группы G, каждая данная (т. е. обозначенная данной буквой) $(n—1)$-мерная грань S_C будет покрываться в разбиении одной в этом смысле (т. е. в смысле того, какой она буквой обозначена) вполне определенной $(n—1)$-мерной гранью того стереоэдра разбиения, который смежен с S_C по этой $(n—1)$-мерной грани, и вполне определенным способом, т. е. определенные ее вершины (обозначенные определенным образом) будут покрывать те или иные определенные вершины рассматриваемой $(n—1)$-мерной грани S_C. Запись этих обстоятельств для всех $(n—1)$-мерных граней S_C мы будем называть символом смежности данного разбиения.

Пусть рассматриваемое нормальное разбиение заведомо правильное. Поставим вопрос, каковы те локальные данные в конечном числе, которые вполне задают его топологию в целом до бесконечности?

Очевидно, что всякое правильное нормальное разбиение топологически вполне характеризуется заданием следующих данных:

1° топология сетки ребер стереоэдра S разбиения;

2° топология схождений стереоэдров разбиения в «гранях» всех измерений стереоэдра S. (Задание 1° и 2° равносильно заданию топологии дуальной звезды разбиения, а именно задание топологии сетки ребер стереоэдра S равносильно заданию топологии смежностей многогранников дуальной звезды между собою, а задание, кроме того, топологии схождений стереоэдров разбиения в «гранях» всех измерений стереоэдра S равносильно заданию также и топологии сеток ребер отдельных многогранников этой звезды.)

3° символ смежности разбиения.

Верно ли, что правильное разбиение топологически все до бесконечности всегда вполне задается заданием только первых двух топологий 1° и 2°, т. е. заданием топологии дуальной звезды, мы не знаем.

Для того чтобы доказать ограниченность в зависимости только от n числа топологически разных нормальных правильных разбиений n-мерного эвклидова пространства, достаточно доказать ограниченность в зависимости только от n числа различных топологий 1° и 2° (т. е. различных топологий дуальной звезды), так как для каждой заданной топологии 1° из чисто комбинаторных соображений уже следует ограниченность числа различных для нее возможных символов смежности 3°.

Для доказательства ограниченности в зависимости только от n числа различных возможных топологий 1°, очевидно, достаточно доказать ограниченность в зависимости только от n числа $(n-1)$-мерных граней стереоэдра, а для доказательства ограниченности в зависимости только от n числа разных возможных топологий 2° достаточно доказать еще ограниченность в зависимости только от n числа стереоэдров, сходящихся в вершине, так как это дает ограниченность в зависимости от n числа топологий многогранников звезды.

Пусть группа G есть по-прежнему группа всех тех движений рассматриваемого эвклидова пространства, которые совмещают с собою заданное нормальное правильное разбиение. Группа эта очевидно дискретная и с конечной фундаментальной областью, т. е. это n-мерная федоровская группа. Может быть, что группа G имеет какую-нибудь подгруппу G' такую, что, какие бы два стереоэдра разбиения ни взять, в ней тоже есть движение, переводящее первый из них во второй, но такое движение только одно. Такую группу G' мы называем фундаментальной группой разбиения, для нее стереоэдры разбиения суть ее фундаментальные области.

Мы не знаем, имеет ли любое правильное разбиение n-мерного эвклидова пространства фундаментальную группу.

Каждое из 11 разбиений 2-мерного эвклидова пространства имеет, по крайней мере, по одной фундаментальной группе, а некоторые из них — даже по несколько разных групп [1]. Но, например, не все правильные разбиения 2-мерной сферы имеют фундаментальные группы — икосаэдрическое и триаконтаэдрическое разбиения, как легко установить, не имеют фундаментальных групп. Полная группа G всех движений, совмещающих с собою рассматриваемое правильное разбиение, большей частью не фундаментальная. Если та подгруппа G_c группы G, при которой некоторый данный стереоэдр S_c с центром тяжести C совмещается с собой, — l-го порядка, то в группе G есть точно l таких движений, при которых некоторый данный стереоэдр разбиения переходит в некоторый данный другой его стереоэдр.

По теореме Шёнфлисса—Бибербаха, в группе G всегда есть n-мерная подгруппа T параллельных переносов. Индекс h группы T в G есть порядок группы Ψ поворотных частей движений g группы G. Группа G_C есть группа вращений стереоэдра S_C вокруг его центра тяжести C. Мы примем за центр поворотов группы Ψ точку C. Группа G_C есть, очевидно, подгруппа группы Ψ_C.

Покажем, что индекс h группы T в G ограничен в зависимости только от n.

Действительно, группа Ψ, очевидно, совмещает с собою точечную решетку $\{C_T\}$, но в таком случае она совмещает с собою n-мерный многогранник, который есть область Дирихле точки C в решетке $\{C_T\}$.

Этот многогранник есть нормальный параллелоэдр, т. е. выпуклая фундаментальная область группы параллельных переносов T; а по теореме Минковского число $(n-1)$-мерных граней параллелоэдра не больше, чем $2(2^n-1)$.

Отсюда следует, что h ограничено в зависимости только от n.

Разложим теперь группу Ψ по подгруппе G_C:

$$\Psi_C = G_C + \psi_2 G_C + \psi_3 G_C + \ldots + \psi_{h'} G_C \left(\text{где } h' = \frac{h}{l}\right);$$

тогда все стереоэдры рассматриваемого разбиения, очевидно, разбиваются на h' непересекающихся решеток стереоэдров $\{S_T\}$, $\{S_{g_2 T}\}, \ldots,$ $\{S_{g_{h'} T}\}$, где $g_1, g_2, \ldots, g_{h'}$ суть какие-либо фиксированные движения группы G, поворотные части которых суть $1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{h'}$.

После всех этих предварительных пояснений докажем две леммы.

Лемма 1. *Число $(n-1)$-мерных граней стереоэдра не больше чем* $2(2^n-1)+(h'-1)\cdot 2^n$.

Рассмотрим для этого какую-нибудь одну из h' «решеток стереоэдров», сейчас описанных.

Возьмем какой-нибудь основной репер точечной решетки центров тяжести стереоэдров этой «решетки стереоэдров».

Координаты центров тяжести всех стереоэдров выбранной решетки будут по отношению к ее основному реперу целыми рациональными числами. Предположим, что среди стереоэдров этой решетки было бы более чем 2^n смежных с некоторым S по $(n-1)$-мерным граням.

В таком случае среди этих смежных с S стереоэдров нашлась бы хоть одна пара, соответственные координаты центров тяжести которых были бы сравнимы по модулю 2, так как всех различных систем по n вычетов по модулю 2 будет 2^n. Пусть S_1 и S_3 — стереоэдры такой пары. Вектор, идущий из центра тяжести S_1 в центр тяжести S_3, имеет все четные координаты, т. е. он есть $2t$, где t — вектор некоторого переноса группы T.

Поэтому, если S_1 преобразовать переносом t, то получится некоторый стереоэдр (той же «решетки стереоэдров») S_2 такой, что S_3 получается из S_2 таким же переносом t, как S_2 из S_1.

Пусть S_1 касается S по $(n-1)$-мерной грани b, а S_3 — по $(n-1)$-мерной грани a. В таком случае на S_1, S_2, S_3 есть грани a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 такие, что a_1, a_2, a_3 равны и обратно параллельны a, а $b_1 b_2 b_3$ равны и обратно параллельны b.

Рассмотрим какие-либо внутренние точки A и B граней a и b; пусть A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 — соответственные им внутренние точки граней a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, причем A_3 совпадает с A и B_1 совпадает с B. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 равны и параллельны, причем $A_1B_1B_3A_3$ — параллелограмм, а A_2B_2 — его средняя линия.

Рассмотрим еще отрезок B_1A_3 — это диагональ этого параллелограмма, она пересекается со средней линией A_2B_2 в точке N, которая есть середина каждого из этих отрезков. В силу выпуклости стереоэдров и нормальности разбиения, все внутренние точки отрезка A_2B_2 суть внутренние точки стереоэдра S_2, а все внутренние точки отрезка B_1A_3 — внутренние точки стереоэдра S.

Точка N есть, таким образом, внутренняя точка для стереоэдра S_2 и стереоэдра S, и поэтому стереоэдры эти совпадают. Отсюда мы делаем вывод, что если в рассматриваемую «решетку стереоэдров» стереоэдр S не входит, то с ним смежны по $(n-1)$-мерным граням не более, чем 2^n стереоэдров этой решетки. Если же S в эту решетку входит, то смежных с ним не более чем $2(2^n-1)$ стереоэдров, так как в этом случае S_2 может быть стереоэдром S, но тогда если за начало репера этой решетки принять центр тяжести C стереоэдра S, то сравнимые по модулю 2 наборы координат у стереоэдров этой решетки, смежных с S по $(n-1)$-мерным граням, могут отличаться только общим множителем -1. Лемма таким образом доказана.

Лемма 2. *Число стереоэдров, имеющих общую вершину, не более чем* $h' \cdot 2^n$.

Рассмотрим опять одну из h' «решеток стереоэдров». Если бы к данной вершине Q подходило больше чем 2^n стереоэдров этой решетки, то в ней существовали бы такие два стереоэдра S_1 и S_3, которые подходят к этой вершине и имеют промежуточный между ними стереоэдр S_2. Покажем, что это невозможно. Для этого рассмотрим какую-нибудь $(n-1)$-мерную плоскость P, разделяющую стереоэдры S_1 и S_2. Такая плоскость всегда будет существовать, так как S_1 и S_2 выпуклы и не имеют общих внутренних точек. Параллельная ей плоскость P', получаемая из плоскости P переносом t, при помощи которого получается S_2 из S_1, будет аналогично разделять S_2 и S_3. Стереоэдры S_1 и S_3 поэтому будут отделены друг от друга слоем («доской» PP') ненулевой толщины (так как между P и P' лежит весь стереоэдр S_2) и поэтому вершина Q не может быть общей для стереоэдров S_1 и S_3.

Лемма доказана.

Теорема. *Число топологически различных правильных нормальных разбиений n-мерного эвклидова пространства ограничено некоторым числом, зависящим только от числа измерений n этого пространства.*

В силу сказанного раньше теорема эта следует из выше доказанных лемм.

Замечание. При $h=1$, т. е. в случае, когда сама группа G есть группа параллельных переносов T, обе границы, указанные в леммах 1 и 2, т. е. в этом случае $2(2^n-1)$ и 2^n, достигаются: первая — для примитивных параллелоэдров, а вторая — для случая, когда параллелоэдр является параллелепипедом. Надо думать, что при $h>1$ данные в леммах 1 и 2 границы могут быть уменьшены.

После доказательства этой теоремы об ограниченности числа топологически различных нормальных разбиений n-мерного эвклидова пространства надо было бы дать алгорифм, позволяющий в конечном числе действий для всякого данного n найти характеристики 1°, 2° и 3° всех возможных таких разбиений. Некоторые соображения относительно построения такого алгорифма мы имеем, но он нами еще далеко не доведен до завершения. Поэтому в остальной части работы мы занимаемся подробным изложением такого алгорифма лишь для частного, но, должно быть, самого важного для физиков, случая, а именно, для случая так называемых правильных разбиений Дирихле.

Этот наш алгорифм основан на методе пустого шара [2], [3], на алгебраической записи движений группы G и на использовании двух найденных нами теорем, изложенных в § 3 и 4.

§ 2. Метод пустого шара

Пусть $\mathcal{S}$ — произвольная система точек n-мерного эвклидова пространства, удовлетворяющая тем условиям, что существует такой радиус $r>0$, что в n-мерном шарике, описанном этим радиусом вокруг любой точки системы $\mathcal{S}$, нет ни одной другой точки системы $\mathcal{S}$ (дискретность), и такой радиус $R>0$, что, где бы в пространстве ни взять центр n-мерного шара радиуса R, внутри него есть хотя бы одна точка системы $\mathcal{S}$ (однородность). Такую систему точек $\mathcal{S}$ будем называть удовлетворяющей условиям r и R или просто (r, R)-системой.

Рассмотрим теперь n-мерный шар, увеличивающийся, уменьшающийся и как угодно передвигающийся между точками системы $\mathcal{S}$, подчиненный лишь одному условию: не содержать внутри себя точек системы $\mathcal{S}$.

Мы будем называть такой шар *пустым*.

Если увеличивать радиус такого шара, не передвигая его центра, то, в силу условия R, он наткнется на некоторые точки системы $\mathcal{S}$.

Если эти точки лежат не n-мерно, то можно, сохраняя то обстоятельство, чтобы они лежали на поверхности нашего шара, увеличивать далее его радиус, отодвигая его центр от того линейного подпространства, в котором лежат эти точки.

При таком увеличении радиуса в силу условия R шар наткнется на дальнейшие точки $\mathcal{E}$, уже не лежащие в этом линейном подпространстве. Продолжая этот процесс дальше, получим, наконец, пустой шар, на поверхности которого лежит n-мерная совокупность точек системы $\mathcal{E}$.

Пустой шар, на котором лежит n-мерная совокупность точек системы $\mathcal{E}$, будем называть шаром (L) в системе $\mathcal{E}$, а выпуклую оболочку всех точек системы $\mathcal{E}$, лежащих на таком шаре (L), — многогранником L системы $\mathcal{E}$.

Теорема 1. *Многогранники L системы $\mathcal{E}$ образуют нормальное разбиение пространства R. Разбиение это однозначно определяется системой $\mathcal{E}$ и обратно однозначно определяет ее, как совокупность своих вершин.*

Действительно, если шары (L_1) и (L_2) многогранников L_1 и L_2 не имеют общих внутренних точек, то подавно их не имеют многогранники; если же шары эти пересекаются и P — их общая хордальная $(n-1)$-мерная плоскость, то, так как шары L_1 и L_2 — пустые, вершины многогранника L_1 лежат на той части поверхности шара (L_1), которая лежит не внутри шара (L_2), а вершины L_2 — на той части поверхности (L_2), которая лежит не внутри шара L_1, и поэтому лежат по разные стороны плоскости или в самой этой плоскости P, а следовательно, ввиду выпуклости многогранников L_1 и L_2, все их внутренние точки лежат по разные стороны плоскости P, т. е. они не имеют общих внутренних точек.

Пусть теперь Q — некоторая $(n-1)$-мерная грань некоторого многогранника L. Будем так изменять шар (L), чтобы вершины грани Q оставались лежащими на этом пустом шаре, а центр передвигался в направлении внешней нормали к грани Q. Тогда шар сначала покинет вершины многогранника L, не принадлежащие грани Q, а затем, в силу условия R, он, наконец, наткнется на некоторые точки $\mathcal{E}$, лежащие в направлении этой нормали от плоскости Q. Так получится некоторый многогранник L', смежный с L по его грани Q. Многогранники L заполняют все пространство, так как если бы где-либо оставалась пустота, то ее границы состояли бы из целых граней многогранников L или их частей, а между тем каждая грань любого многогранника L покрыта гранью другого многогранника L'.

Разбиение $\{L_{\mathcal{E}}\}$ пространства на многогранники L системы $\mathcal{E}$ однозначно ею задано, так как если бы было второе такое разбиение, то были бы два многогранника L, имеющие общие внутренние точки и не совпадающие, а этого, как мы видим, быть не может.

Теорема доказана.

Областью Дирихле $D_{A_{\mathcal{E}}}$ некоторой точки A системы $\mathcal{E}$ называется тот выпуклый многогранник, который состоит из тех точек пространства, каждая из которых отстоит от точки A системы $\mathcal{E}$ не дальше, чем от любой другой точки системы $\mathcal{E}$.

Ее можно получить так. Провести из точки A отрезки ко всем другим точкам системы $\mathcal{E}$ и через середину каждого из этих отрезков — перпендикулярную к нему $(n-1)$-мерную плоскость. Пересечение тех полупространств, отрезаемых всеми этими плоскостями, в которых лежит точка A, будет, в силу условий r, R, некоторым конечным выпуклым многогранником с конечным числом граней, который и будет областью Дирихле точки A в системе $\mathcal{E}$. Точку A системы $\mathcal{E}$ называют центром действия области $D_{A_{\mathcal{E}}}$.

Многогранники D так же, как и многогранники L, образуют нормальное разбиение пространства. Нормальным оно является потому, что по одной и той же $(n-1)$-мерной грани с данной областью Дирихле D не могут быть смежны две разные области Дирихле D_1 и D_2 разбиения, так как тогда плоскость этой грани была бы одновременно перпендикулярна к обоим отрезкам AA_1 и AA_2, где A, A_1, A_2 — центры действия D, D_1, D_2.

Разбиение пространства на многогранники L, соответствующие всем точкам системы $\mathcal{E}$, мы будем обозначать через $\{D_{\mathcal{E}}\}$.

Теорема 2. *Разбиения $\{L_{\mathcal{E}}\}$ и $\{D_{\mathcal{E}}\}$ топологически дуальны и метрически дуальны в том смысле, что многогранник $D_{A_{\mathcal{E}}}$ точки A системы $\mathcal{E}$ вполне метрически определяется совокупностью многогранников L, сходящихся в точке A, а именно: любая k-мерная грань $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ многогранника $D_{A_{\mathcal{E}}}$ есть не что иное, как выпуклая оболочка центров шаров всех тех многогранников L, сходящихся в точке A, которые смежны по некоторой $(n-k)$-мерной грани разбиения $\{L_{\mathcal{E}}\}$, одной из вершин которой является точка A, и, обратно. Многогранник L метрически вполне определяется совокупностью многогранников $D_{\mathcal{E}}$, имеющих общую вершину в центре шара (L). А именно, k-мерная грань $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ есть выпуклая оболочка центров действия всех тех многогранников D, сходящихся в центре шара (L), которые смежны по некоторой $(n-k)$-мерной грани разбиения $\{D_{\mathcal{E}}\}$, одной из вершин которой является центр шара (L).*

Доказательство очевидно.

Таким образом, для того чтобы найти разбиение $\{D_{\mathcal{E}}\}$ как топологически, так и метрически, достаточно, ввиду теоремы 2, найти разбиение $\{L_{\mathcal{E}}\}$.

Теорема 3. *Для того чтобы шар, имеющий на своей поверхности точку A системы $\mathcal{E}$, был пустой, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал внутри себя ни одной вершины звезды $L_{A_{\mathcal{E}}}$.*

Действительно, если такой шар содержит внутри себя какую-нибудь точку системы $\mathcal{E}$, то заменим его сначала шаром, на поверхности которого лежит точка A и центр которого находится на отрезке, соединяющем центр исходного шара с точкой A, и столь малым, что он пуст. Будем теперь отодвигать центр этого малого шара по упомянутому отрезку от точки A и увеличивать его радиус так, чтобы точка A оставалась на его поверхности.

В силу условия R, и притом до того, как радиус замененного шара сравнится с радиусом исходного, он наткнется, наконец, на некоторую точку B системы $\mathcal{E}$, которая будет находиться внутри исходного шара.

Действуя далее так, как мы поступали на стр. 34, мы получим многогранник L, вершинами которого будут точки A и B, что и доказывает теорему.

§ 3. Теорема о звезде L_A правильного разбиения Дирихле эвклидова пространства

Напомним, что мы называем правильным разбиением Дирихле.

Пусть система $\mathcal{E}$ правильная, т. е., какие бы две точки системы $\mathcal{E}$ не взять, в группе G движений пространства R_n, совмещающей систему $\mathcal{E}$ с собою, есть хоть одно движение, при котором первая из этих точек переходит во вторую. Если A — одна из точек системы $\mathcal{E}$, то в этом случае вся система $\mathcal{E}$ есть не что иное, как совокупность точек $\{A_G\}$.

Разбиение Дирихле $\{D_{A_G}\}$ для этой системы $\{A_G\}$ будет, очевидно, правильным нормальным разбиением пространства R_n на стереоэдры. Как показывают простейшие примеры, обратное, вообще говоря, неверно, т. е. не всякое правильное нормальное разбиение R_n на стереоэдры есть разбиение Дирихле.

Это будет так только в том случае, когда в стереоэдре разбиения можно будет найти точку A такую, что всякая его $(n-1)$-мерная грань перпендикулярна к отрезку, соединяющему эту точку A с соответствующей точкой смежного по этой грани стереоэдра.

Точку A мы будем называть неподвижной по отношению к группе G, если в G есть отличные от тождественного движения, преобразующие точку A в себя. Если таковые есть, то они образуют некоторую конечную подгруппу поворотов G_A вокруг точки A некоторого порядка $l > 1$. Если таких движений, кроме тождественного, нет, т. е. $l = 1$, то мы будем называть точку A подвижной. Очевидно, что если A — подвижная точка, то области D_{A_G} будут фундаментальными областями группы G, и группа G для этого разбиения будет фундаментальной, если же A неподвижная, то область D_A группы G — не фундаментальная для рассматриваемого разбиения, в этом случае область D_A разбивается на l фундаментальных областей группы G и притом, вообще говоря, не единственным способом. Совокупность всех многогранников некоторого разбиения, хотя бы и неправильного, имеющих общую вершину A, называют, как мы уже говорили, звездой точки A в этом разбиении. Для правильной системы точек $\{A_G\}$ можно тоже рассматривать разбиение $\{L_{A_G}\}$. Звезды всех вершин разбиения $\{L_{A_G}\}$, очевидно, одинаковы, причем они получаются из звезды L_A точки A теми движениями из G, при помощи которых эти точки получаются из точки A.

Зная звезду L_A точки A, можно, следовательно, определить топологии 1° и 2° § 1 и, как легко видеть, символ смежности 3° и построить все разбиение $\{L_{A_G}\}$, а следовательно, и разбиение $\{D_{A_G}\}$.

Для того чтобы найти звезду L_A, нам надо будет, прежде всего, выделить из $\{A_G\}$ некоторую конечную совокупность точек такую, что среди них заведомо содержатся все вершины многогранников L звезды L_A.

Этот вопрос решается на основании следующей теоремы.

Теорема. *Если система $\mathcal{E}$ есть совокупность решеток одинаковых и параллельных $\{A_T\}$, то звезда L_A точки A в системе $\mathcal{E}$ лежит в линейно удвоенной из ее центра действия области D_{A_T} точки A решетки $\{A_T\}$.*

Доказательство. Пусть A' — некоторая точка решетки $\{A_T\}$, отличная от A, и γ — $(n-1)$-мерная плоскость, проходящая через точку A' перпендикулярно к отрезку AA'. Пусть вершина A_1 какого-либо многогранника L звезды L_A разбиения $\{L_{\mathcal{E}}\}$ точки A лежит по другую, чем точка A, сторону от плоскости γ.

Проведем через точки A, A', A_1 двумерную плоскость π. В силу сделанного относительно системы $\mathcal{E}$ предположения, точка A_1', получаемая из A_1 переносом на вектор $t = \overrightarrow{A'A}$ из T, тоже принадлежит системе $\mathcal{E}$ и лежит в плоскости π. Таким образом, в плоскости π образуется параллелограмм $AA'A_1A_1'$ с тупым углом при вершинах A' и A_1'. Но тогда любая окружность, проходящая через две его другие вершины A и A_1, содержит внутри себя, по крайней мере, хотя бы одну из точек A_1', A' системы $\mathcal{E}$, т. е. точка A_1 не лежит на пустом в $\mathcal{E}$ шаре, проходящем через точку A, и, следовательно, не может быть вершиной звезды L_A точки A разбиения $\{L_{\mathcal{E}}\}$. Всякая вершина этой звезды, следовательно, лежит по ту же сторону плоскости γ, по которую лежит точка A, или на самой этой плоскости. Все вершины звезды L_A лежат, следовательно, внутри или на границе удвоенной области Дирихле $2D_{A_T}$ точки A решетки $\{A_T\}$.

Замечание. Данная теорема верна для системы $\{A_G\}$, так как $\{A_G\}$ есть совокупность h' различных параллельных между собой решеток $\{A_T\}$, где T — подгруппа параллельных переносов группы G, а h' — делитель индекса h этой подгруппы в группе G.

§ 4. Одна теорема о квадратичных формах

Если через концы векторов какого-либо основного репера E решетки и им обратных векторов провести перпендикулярные к ним $(n-1)$-мерные плоскости, то получится некоторый параллелепипед M_E, который мы будем называть ортогональным параллелепипедом этого репера.

Основной репер E решетки называется приведенным по Эрмиту — Минковскому, если его векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ выбраны следующим образом: e_1 есть самый короткий вектор решетки, e_2 — самый короткий из ему не коллинеарных, e_3 — самый короткий из некомпланарных e_1 и e_2, e_4 — самый короткий из некомпланарных e_1, e_2, e_3, из таких, что в 4-мерной подрешетке заданной решетки, лежащей в линейном многообразии, натянутом на e_1, e_2, e_3, e_4, репер (e_1, e_2, e_3, e_4) — основной и т. д.

Как это показывает Минковский, для такого репера E при любых i и k имеют место неравенства:

$$a_i\,|\lambda_{ik}| \leqslant \frac{a_k}{2}, \tag{1}$$

$$|\lambda_{ik}| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где a_i и a_k — длины векторов e_i и e_k, а λ_{ik} — косинус угла между ними.

Практическое использование теоремы предыдущего параграфа дальше будет состоять в том, чтобы на основании этой теоремы ограничить координаты тех точек, которые могут быть вершинами звезды. Но отыскание области Дирихле для $n > 4$ способом Вороного [4] практически очень сложно. Ввиду этого мы заменяем удвоенную область Дирихле § 3 ортогональным параллелепипедом, который ее содержит.

Если основной репер решетки — какой-угодно, то координаты вершин его ортогонального параллелепипеда, как легко видеть, могут быть сколь угодно большими.

Но оказывается, что если этот репер взять приведенным по Эрмиту—Минковскому, то верна следующая

Теорема. *Если репер* E *приведен по Эрмиту—Минковскому, то координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по отношению к нему всех вершин ортогонального ему параллелепипеда M_E по абсолютной величине меньше некоторого числа, зависящего только от n.*

Доказательство. Уравнение $(n-1)$-мерной плоскости, перпендикулярной к i-му вектору e_i репера E и проходящей через конец этого вектора, в векторной форме пишется так:

$$(e_i \cdot r) = a_i,$$

где r — текущий вектор этой плоскости, а a_i — длина вектора e_i. Если $r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, то в координатной форме оно приобретает вид:

$$a_1\lambda_{i1}x_1 + a_2\lambda_{i2}x_2 + \ldots + a_{i-1}\lambda_{ii-1}x_{i-1} + a_i x_i +$$
$$+ a_{i+1}\lambda_{ii+1}x_{i+1} + \ldots + a_n\lambda_{in}x_n = a_i.$$

Плоскости граней ортогонального параллелепипеда M_E будут иметь поэтому уравнения:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1x_1+a_2\lambda_{12}x_2+\ldots+a_i\lambda_{1i}x_i+\ldots+a_n\lambda_{1n}x_n\pm a_1=0,\\
a_1\lambda_{21}x_1+a_2x_2+\ldots+a_i\lambda_{2i}x_i+\ldots+a_n\lambda_{2n}x_n\pm a_2=0,\\
\cdot\;\cdot\\
a_1\lambda_{n1}x_1+a_2\lambda_{n2}x_2+\ldots+a_i\lambda_{ni}x_i+\ldots+a_nx_n\pm a_n=0,
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

всего $2n$ таких плоскостей.

Для определения координат вершин параллелепипеда M_E надо решить системы уравнений (3) при всех возможных выборах знаков свободных членов.

По формулам Крамера имеем:

$$x_i=\frac{D_i}{D_M},$$

где D_M — определитель системы. Он одинаков для всех этих систем, а именно равен:

$$D_M=a_1a_2\ldots a_nd,$$

где d есть так называемый пространственный синус Штаудта репера E, равный квадрату объема параллелепипеда, построенного на репере E′, имеющем те же направления векторов, как и E, но длины векторов которого равны 1.

Что касается числителя D_i, то он равен:

$$D_i=a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_nL_i,$$

где под L_i мы понимаем определитель:

$$L_i=\begin{vmatrix}
1, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, \ldots, & \lambda_{1i-1}, & a_1, & \lambda_{1i+1}, & \ldots, & \lambda_{1n},\\
\lambda_{21}, & 1, & \lambda_{23}, \ldots, & \lambda_{2i-1}, & a_2, & \lambda_{2i+1}, & \ldots, & \lambda_{2n},\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\lambda_{n1}, & \lambda_{n2}, & \lambda_{n3}, \ldots, & \lambda_{ni-1}, & a_n, & \lambda_{ni+1}, & \ldots, & 1
\end{vmatrix}$$

или определитель, полученный из него изменением знаков a_i.

После подстановки этих значений D_M и D_i в x_1 получаем:

$$|x_i|=\frac{\mathscr{L}_i}{a_id}.$$

Синус Штаудта репера E Эрмита—Минковского, как это показал Минковский, больше некоторого положительного числа c_1, зависящего только от n.

Покажем, что определитель $\mathscr{L}_i$ по абсолютной величине меньше a_ic_2, где c_2 — некоторое положительное число, тоже зависящее только от n.

Тогда, по сокращении на a_i, мы получаем, что $x_i < \frac{c_2}{c_1}$, т. е. меньше некоторого положительного числа β_n, зависящего только от n.

Для доказательства того, что $|\mathscr{L}_i| < a_i c_2$, разложим $\mathscr{L}_i$ по элементам i-го столбца и заменим миноры A_{ji} этих элементов их абсолютными величинами.

Мы получим тогда:

$$|\mathscr{L}_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j |A_{ji}|.$$

Если $j = i$, то, ввиду условий (2), имеет место неравенство:

$$a_i |A_{ii}| < a_i \left(1 + \frac{(n-1)!}{2}\right).$$

Перейдем теперь к случаю $j \neq i$, и пусть $\prod \lambda_{mk}$ — какой-либо отдельный член минора A_{ji}. В таком случае мы будем иметь неравенство:

$$a_j |A_{ji}| \leqq \sum a_j |\prod \lambda_{mk}|.$$

Произведем оценку отдельных слагаемых

$$a_j \prod \lambda_{mk}$$

этой суммы.

Так как, по предположению, $j \neq i$, то в $\prod \lambda_{mk}$ есть элемент i-й строки определителя $\mathscr{L}_i$, пусть это будет λ_{ik}, т. е. он стоит в k-м столбце этого определителя ($i \neq k$, так как в A_{ji} отсутствует i-й столбец).

Будем теперь выписывать один за другим элементы минора A_{ji}, входящие множителями в рассматриваемое произведение $\prod \lambda_{mk}$, по следующему принципу: начнем с элемента λ_{ik}, далее, если номер k столбца определителя $\mathscr{L}_i$, в котором он стоит, не равен j, то за следующий элемент возьмем тот множитель рассматриваемого члена $\prod \lambda_{mk}$ минора A_{ji}, который стоит в k-й строке $\mathscr{L}_i$, пусть это будет λ_{ks}.

Вообще, если последний выписанный множитель, входящий в рассматриваемый член $\prod \lambda_{mk}$, оказался в β-м столбце $\mathscr{L}_i$ и $\beta \neq j$, то следующий выбираем тот, который находится в β-й строке $\mathscr{L}_i$. Ввиду того, что всех множителей в $\prod \lambda_{mk}$ конечное число, этот процесс кончится, а кончиться он может только, если у выписанного элемента $\lambda_{\gamma\varkappa}$ окажется, что $\varkappa = j$, так как в A_{ji} нет элементов j-й строки. Так получим некоторое произведение $\lambda_{ik} \cdot \lambda_{ks} \ldots \lambda_{\alpha\beta} \cdot \lambda_{\beta\gamma} \cdot \lambda_{\gamma j}$, состоящее из всех $(n-1)$-множителей $\prod \lambda_{mk}$ или только из некоторого числа m_1 из них, где $m_1 < n - 1$.

Оценим теперь выписанное произведение:

$$a_j \cdot \lambda_{ik} \cdot \lambda_{ks} \ldots \lambda_{\beta\gamma} \cdot \lambda_{\gamma j}.$$

Используя неравенство (1) Минковского, мы будем последовательно получать

$$\lambda_{ik}\cdot\lambda_{ks}\dots\lambda_{\beta\gamma}\cdot\lambda_{\gamma j}\cdot a_j\leqslant\lambda_{ik}\cdot\lambda_{ks}\dots\lambda_{\beta\gamma}\cdot\frac{a_\gamma}{2}\leqslant$$
$$\leqslant\lambda_{ik}\cdot\lambda_{ks}\dots\lambda_{\alpha\beta}\cdot\frac{a_\beta}{2^2}\leqslant\lambda_{ik}\cdot\frac{a_k}{2^{m_1-1}}\leqslant\frac{a_i}{2^{m_1}}.$$
$$\vdots$$

Отсюда, в силу неравенств (2), получаем:

$$|a_j\prod\lambda_{mk}|<\frac{a_i}{2^{m_1+m_2}}\qquad(\text{где } m_1+m_2=n-1),$$

следовательно,

$$a_j|A_{ji}|<n!\,\frac{a_i}{2},$$

откуда

$$|L_i|\leqslant\frac{a_i}{2}\cdot n\cdot n!,$$

т. е.

$$c_2=\frac{n\cdot n!}{2}.$$

Должно быть, эта теорема верна для реперов, приведенных не только по Минковскому.

§ 5. Приведенная область пространства параметров задачи

Пусть G — n-мерная федоровская группа, а T — подгруппа ее параллельных переносов, h — индекс T в G. Тогда группа поворотных частей движений Ψ имеет порядок h и все повороты ψ, производимые вокруг точки O (O — какая-либо точка пространства), совмещают решетку $\{O_T\}$ с собою. Из теории федоровских групп известно [6], что если записывать отдельные движения из G, приняв за координатный репер какой-либо основной репер решетки $\{O_T\}$ с началом в точке O, то движения эти будут записываться формулами:

$$x'_i=b^j_{1i}x_1+b^j_{2i}x_2+\dots+b^j_{ni}x_n+c^j_i+t_i,$$
$$j=1,\,2,\,\dots,h,\qquad i=1,\,2,\,\dots,n,\tag{*}$$

где (b^j_{ik}) — n-мерная целочисленная унимодулярная матрица поворота, $0\leqslant c^j_i<1$ — координаты некоторых специальных переносов и t_i — любые целые числа.

Пусть $f=\sum a_{ik}x_ix_k$ — метрическая квадратичная форма выбранного основного репера решетки $\{O_T\}$. В таком случае линейные преобразования с матрицами (b^j_{ik}) будут преобразовывать форму f в себя. Отсюда мы получаем $\frac{n(n+1)}{2}(h-1)$ линейных уравнений, которым должны удовлетворять координаты a_{ik} формы f. В силу теоремы Кронекера—Капелли получится, что некоторые m коэффициентов формы остаются произвольными, а остальные $\frac{n(n+1)}{2}-m$ линейно выражаются через них. Эти m коэффициентов мы будем обозначать через $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и называть метрическими параметрами группы G.

Какую бы конечную группу n-мерных целочисленных унимодулярных матриц (b^j_{ik}) ни взять, всегда существует положительная квадратичная форма f, преобразуемая всеми матрицами этой группы в себя (например, форма, получаемая из любой данной положительной квадратичной формы, если ее преобразовать всеми этими матрицами и все полученные так формы сложить: эта сумма при преобразовании каждой из этих матриц не изменяется ввиду того, что слагаемые формы будут только переставляться).

Пусть **K** в пространстве коэффициентов a_{ik} $\frac{n(n+1)}{2}$-мерный конус положительных квадратичных форм. Если переменные x_i всех форм подвергнуть одному и тому же целочисленному унимодулярному преобразованию s, то коэффициенты этих форм подвергнутся некоторому также линейному целочисленному унимодулярному преобразованию $\bar{s}$ (а именно матрица преобразованной формы будет равна $s'(a_{ik})s$), которое будем называть индуцированным преобразованием s. Группа $\bar{s}$ имеет в **K** некоторую фундаментальную область Φ, которую можно, например, выбрать в виде выпуклого гоноэдра с конечным числом граней, так что две разные внутренние ее точки дают уже формы, соответствующие основным реперам разных решеток. Рассмотрим некоторую конечную группу Ψ унимодулярных целочисленных матриц (b_{ik}). Совокупность всех точек конуса **K**, каждая из которых неподвижна относительно всех преобразований группы $\bar{\Psi}$, индуцированной группой Ψ, мы будем называть многообразием Бравэ, соответствующим группе Ψ, и будем его обозначать через B_Ψ. Очевидно, что многообразие Бравэ линейно и проходит через начало координат.

Пусть $s^{-1}\Psi s = \Psi^s$ — группа, эквивалентная группе Ψ. Многообразие Бравэ, соответствующее группе Ψ^s, будем называть эквивалентным многообразием, соответствующим группе Ψ, и обозначать через $B_{\Psi^{-s}}$. Очевидно, что оно получается из B_Ψ подстановкой $\bar{s}$. Для всех групп, кроме триклинных, $\Psi = E$; $\Psi = E, -E$, все точки многообразия Бравэ B_Ψ принадлежат граням разбиений на фундаментальные области, так как только триклинные подстановки индуцируют тождественную подстановку $\bar{s}$.

Если же группа не триклинная, то она индуцирует и нетождественные подстановки, а если $\bar{s}$ нетождественная, то всякая точка, лежащая внутри конуса **K** и неподвижная относительно такой подстановки $\bar{s}$, не может быть внутренней ни для какой фундаментальной области, так как иначе $\bar{s}$ преобразовала бы эту фундаментальную область в другую, имеющую с ней общую внутреннюю точку, что невозможно.

Пусть область Φ есть область приведения Минковского. Она есть выпуклый гоноэдр с конечным числом граней, и разбиение на эквивалентные ей области нормально.

Как показал Минковский, элементы $s_{ik}(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,n)$ всех тех подстановок s, которые переводят гоноэдр Ф в эквивалентный ему гоноэдр, имеющий с Ф общие точки, внутренние в конусе, ограничены некоторым числом, зависящим от числа измерений n, откуда следует, что гоноэдров, смежных так с данным, ограниченное число (см. [5], стр. 70—72).

Пересечение многообразия Бравэ с фундаментальной областью Ф группы $\bar{s}$, если таковое имеется, называется приведенной частью многообразия.

Для разыскания всех приведенных частей всех многообразий Бравэ достаточно рассмотреть все возможные подгруппы из всех тех матриц, которые гоноэдр Ф переводят в смежные с ним по данной k-мерной грани $\left(k=1,\ 2,\ldots,\frac{(n+1)\,n}{2}\right)$ гоноэдры, имеющие точки, лежащие внутри конуса.

Затем для всякой такой выбранной группы нужно определить соответствующее ей многообразие Бравэ и рассмотреть пересечение каждого из них с гоноэдром Ф. Полученные пересечения, если они не пустые, дают все различные приведенные части многообразий Бравэ. Обозначим эти приведенные части через $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_s$. Их конечное число.

Для одной и той же федоровской группы G различных приведенных частей B_q, соответствующих ей, будет, вообще говоря, несколько. Для каждой B_q будем решать задачу в отдельности и записывать группу G в виде подстановок (*) в репере, принадлежащем этому B_q. Конечная группа Ψ_{qk} целочисленных матриц (b_{ik}^j), участвующих в записи (*), будет подгруппой полной группы Ψ_q матриц (так называемой голоэдрии, соответствующей данной B_q), которые оставляют точки B_q на месте. Эта подгруппа будет относиться к сингонии этой голоэдрии. (Подгруппу голоэдрии кристаллографы относят к сингонии данной голоэдрии, если она не является одновременно подгруппой некоторой другой голоэдрии, содержащейся в первой.) Зафиксировав эту подгруппу Ψ_{qk}, мы для нее найдем, например, при помощи алгорифма Цассенхауза [6], те или иные значения c_i^j; так мы получим запись (*) некоторой федоровской группы G, соответствующей данной приведенной части B_q. Наша задача состоит в нахождении всех возможных разбиений Дирихле $\{D_{A_G}\}$ для этой записи. Рассмотрим теперь, каковы параметры этой задачи. Параметрами, во-первых, будут $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$, принадлежащие B_q (m — число измерений B_q), во-вторых, координаты $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ точки A по отношению к реперу, выбранному из B_q и в котором записана группа.

Правильная система $\{A_G\}$ вполне метрически задана, если задана такая запись группы G, т. е. ее запись (*), кроме того, заданы ее метрические параметры $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$, выбранные в B_q, и координаты $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ точки A по отношению к выбранному основному реперу решетки $\{O_T\}$.

Координаты x_i достаточно брать между 0 и 1, т. е. в основном параллелепипеде, являющемся фундаментальной областью подгруппы T.

Эту область выбора точки $A(x_i)$ можно значительно уменьшить, а именно, можно взять фундаментальную область нормализатора этой группы.

Векторную сумму в пространстве параметров нашей задачи, составленную из приведенной части B_q и единичного куба $0 \leqslant x_i < 1$ (или фундаментальной области нормализатора группы), обозначим через B_{qG}.

Область B_{qG} и будет приведенной областью параметров нашей задачи.

§ 6. Условие пустоты шара

Пусть дана группа G формулами (*) и

$$A(x_i), \quad A_1(x_i^{(1)}), \ \ldots, \ A_n(x_i^{(n)}) \tag{4}$$

— n-мерная совокупность $(n+1)$ точек системы $\{A_G\}$, где $A(x_i)$ — исходная точка.

Если обозначить

$$d_{12\ldots n}(x_i) = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, x_n, & 1 \\ x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, x_n^{(1)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, x_n^{(n)}, & 1 \end{vmatrix},$$

то n-мерность указанных точек аналитически выражается как $d_{1.2\ldots n}(x_i) \neq 0$.

Если координаты $x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ исходной точки A таковы, что $d_{12\ldots n}(x_i) \neq 0$, то на $(n+1)$ образах (4) можно всегда построить вполне определенный шар.

Метрическую форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ репера $\mathbf{E}$, в котором записана группа G, определяют значения параметров $a_1, a_2, \ldots, a_m$, соответствующие многообразию Бравэ B.

Обозначив через ξ_i координаты центра, через R_1 — радиус шара, построенного на точках (4), имеем уравнения:

$$f(x_i^{(j)} - \xi_i) = R_1^2 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Применив к последнему разложение по Тейлору, получим

$$f(x_i^{(j)}) - \frac{\partial f}{\partial x_1^{(j)}}\xi_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2^{(j)}}\xi_2 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_n^{(j)}}\xi_n + f(\xi_i) - R_1^2 = 0. \tag{5}$$

Аналогичное уравнение

$$f(t_i) - \frac{\partial f}{\partial t_1}\xi_1 - \frac{\partial f}{\partial t_2}\xi_2 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial t_n}\xi_n + f(\xi_i) - R_1^2 = 0 \tag{6}$$

получим для любой точки (t_i) этой сферы.

Рассматривая систему из $(n+2)$ написанных уравнений (5) и (6) с $(n+1)$ неизвестными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, R_1$, получим уравнение сферы в виде определителя $(n+2)$-го порядка:

$$\begin{vmatrix} f(t_i), & \frac{\partial f}{\partial t_1}, & \frac{\partial f}{\partial t_2}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial t_n}, & 1 \\ f(x_i), & \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \frac{\partial f}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n}, & 1 \\ f(x_i^{(1)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(1)}}, & \frac{\partial f}{\partial x_2^{(1)}}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n^{(1)}}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_i^{(n)}), & \frac{\partial f}{\partial x_1^{(n)}}, & \frac{\partial f}{\partial x_2^{(n)}}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n^{(n)}}, & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Г. Ф. Вороной показал, что этот определитель может быть представлен в виде произведения двух определителей:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ 0, & 0, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ 0, & 0, & a_{31}, & a_{32}, & \ldots, & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(t_i), & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n, & 1 \\ f(x_i), & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 1 \\ f(x_i^{(1)}), & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ f(x_i^{(n)}), & x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, & 1 \end{vmatrix}$$

Таким образом, уравнение (7) сферы сводится к следующему:

$$\begin{vmatrix} f(t_i), & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n, & 1 \\ f(x_i), & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 1 \\ f(x_i^{(1)}), & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_i^{(n)}), & x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Если перенумеровать точки (4) так, чтобы минор элемента $f(t_i)$ в (8) был положителен, то условие того, что некоторая точка F с координатами $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^{(0)}$ не лежит внутри шара, построенного на точках (4), запишется так:

$$\begin{vmatrix} f(x_i^0), & x_1^0, & x_2^0, & \ldots, & x_n^0, & 1 \\ f(x_i), & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 1 \\ f(x_i^{(1)}), & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_i^{(n)}), & x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Вместо произвольной точки (x_i^0) возьмем некоторую точку $A_p(x_i^{(p)})$ системы $\{A_G\}$.

Условие того, что точка $A_p(x_i^{(p)})$ не лежит внутри этого шара, получим в форме:

$$\begin{vmatrix} f(x_i^{(p)}), & x_1^{(p)}, & x_2^{(p)}, & \ldots, & x_n^{(p)}, & 1 \\ f(x_i), & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 1 \\ f(x_i^{(1)}), & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_i^{(n)}), & x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{9}$$

Ввиду того, что квадратичная форма $f(x_i)$ при подстановке в нее координат точки $A_m(x_i^{(m)})$ инвариантна по отношению к поворотной части, описываемой матрицей (b_{ik}^j), имеем:

$$f(x_i^{(m)}) = f(x_i) + \nabla_m, \tag{10}$$

где

$$\nabla_m = \frac{\partial f}{\partial x_1^{(m)}}(c_1^{(j)} + t_1^{(m)}) + \frac{\partial f}{\partial x_2^{(m)}}(c_2^{(j)} + t_2^{(m)}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n^{(m)}}(c_n^{(j)} + t_n^{(m)}) + f(c_i^{(j)} + t_i^{(m)})$$

является линейной комбинацией координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Условие (10) позволяет сделать дальнейшее упрощение определителя (9), а именно, представить его, как сумму двух определителей:

$$\begin{vmatrix} f(x_i) & x_1^{(p)}, & x_2^{(p)}, & \ldots, & x_n^{(p)}, & 1 \\ f(x_i) & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 1 \\ f(x_i) & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_i) & x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nabla_p, & x_1^{(p)}, & x_2^{(p)}, & \ldots, & x_n^{(p)}, & 1 \\ 0, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 1 \\ \nabla_1, & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nabla_n, & x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, & 1 \end{vmatrix}$$

Первый из них тождественно равен нулю.

Таким образом, условие (9) сводится к следующему:

$$D_{12\ldots n,\,p}(x_i a_k) = \begin{vmatrix} \nabla_p, & x_1^{(p)}, & x_2^{(p)}, & \ldots, & x_n^{(p)}, & 1 \\ 0, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 1 \\ \nabla_1, & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nabla_n, & x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots, & x_n^{(n)}, & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{11}$$

Если точка $A_p(x_i^{(p)})$ лежит на шаре, то (11) будет равенством.

§ 7. Нахождение звезд L_A и фазовых областей для них

В параметрическом пространстве нашей задачи каждой точке P с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ соответствует некоторая вполне определенная звезда L_A, а именно звезда L_A, где точка A имеет координаты $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а параметрами группы являются $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Мы будем находить все возможные звезды L_A правильных разбиений для данной федоровской группы, записанной формулами (*), в рассматриваемой приведенной области параметров B_{qG}.

Для всех точек P, находящихся в области B_{qG}, все координаты точек $x'_i = \sum_{k=1}^{n} b^j_{ik} x_k + c^j_i + t_i$, которые могут быть вершинами звезды L_A, в силу теоремы § 4 по абсолютной величине меньше $\beta_n + 1$, где β_n — число, зависящее только от n.

Ввиду того, что b^j_{ik}, c^j_i заданы, а $0 \leqslant x_i < 1$ (или даже x_i сильнее ограничены, если взять фундаментальную область нормализатора группы G), получается, что числа t_i также ограничены по абсолютной величине; но t_i — целые числа, поэтому получаем конечное число возможностей. Отсюда следует, что те точки (их конечное число), которые могут являться вершинами звезды, могут быть выписаны, т. е. найдены все значения соответствующих им t_i.

Обозначим эти точки

$$A(x_i), \quad A_1(x_i^{(1)}), \quad A_2(x_i^{(2)}), \ldots, A_w(x_i^{(w)}). \tag{12}$$

Принимая во внимание § 6, для приведенной параметрической области B_{qG} выписываем конечную матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} 0, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & 1 \\ \nabla_1, & x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, & 1 \\ \nabla_2, & x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \ldots, & x_n^{(2)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nabla_w, & x_1^{(w)}, & x_2^{(w)}, & \ldots, & x_n^{(w)}, & 1 \end{pmatrix},$$

состоящую из $(w+1)$ строк, которые соответствуют точкам (12).

Очевидно, достаточно искать все многогранники L звезды L_A среди тех многогранников, вершинами которых будут точки (12), а пустоту их шаров, ввиду теоремы 3 § 2, исследовать тоже только для этих точек.

Далее поступаем следующим образом. Берем всегда первую строку матрицы C и произвольно k каких-либо ее строк

$$i_1, i_2, \ldots, i_k \quad (k \geqslant n) \tag{13}$$

таких, чтобы определитель $d_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x_i) \not\equiv 0$ и область, определяемая неравенством $d_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x_i) > 0$, имела непустое пересечение с единичным кубом $0 \leqslant x_i < 1$ (или, если взять нормализатор группы, то с фундаментальной областью нормализатора).

С выбранными строками $i_1, i_2, \ldots, i_n$ составляем следующую алгебраическую систему:

$$\begin{gathered} D_{i_1 i_2 \ldots i_n, p}(x_i, a_k) = 0, \quad p = i_1, i_2, \ldots, i_k, \\ d_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x_i) > 0, \end{gathered} \tag{14}$$

$D_{i_1 i_2 \ldots i_n, s}(x_i, a_k) > 0$, $s = 1, 2, \ldots, w$, кроме $s = i_1, i_2, \ldots, i_k$, в которой уравнения означают, что на шаре, построенном на точках $A, A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$, лежат еще точки $A_{i_{n+1}}, A_{i_{n+2}}, \ldots, A_{i_k}$, а неравенства (строгие) означают, что все точки (12), за исключением только лежащих на этом шаре точек (13), находятся строго вне этого шара.

Если система (14) удовлетворяется хотя бы для какой-нибудь точки приведенной части B_{qG} пространства параметров, то совокупность точек $A, A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ является совокупностью всех вершин некоторого многогранника L соответствующего разбиению Дирихле, отвечающему выбранной точке в B_{qG}. Назовем в этом случае систему (14) системой, соответствующей многограннику L.

Построим только что указанным образом совокупность таких

$$L_1, L_2, \ldots, L_\alpha \tag{15}$$

многогранников, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. Многогранники (15) не входят друг в друга, облегают точку A и смежны по целым граням, проходящим через точку A.

2. Множество Δ всех точек B_{qG}, удовлетворяющих одновременно всем алгебраическим системам, соответствующим этим многогранникам (15), непусто.

Совокупность (15) будет звездой L_A для точек области Δ, которую назовем фазовой областью этой звезды. Очевидно, что для всех точек одной и той же фазовой области топология 1°, 2° и символ смежности разбиения Дирихле одинаковы.

Выбирая всевозможные совокупности (15), найдем все фазовые области $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_\theta$, на которые разбивается область B_{qG}. Число θ конечно ввиду конечности матрицы C и алгебраичности системы (14).

Если в алгебраической системе (14) для некоторого выбора строк все алгебраические уравнения будут тождествами относительно x_i, a_k, то это значит, что точки, соответствующие строкам (13), будут консферичны для любой точки пространства параметров нашей задачи.

Если последнее условие будет выполняться для каждого многогранника L звезды L_A, то фазовая область, которую мы назовем фазовой областью общего типа, очевидно, будет $(n+m)$-мерной.

Для каждой приведенной параметрической части B_{qG} имеется, по крайней мере, хотя бы одна фазовая область общего типа, так как область B_{qG} разбивается на конечное число фазовых областей, а область B_{qG} $(n+m)$-мерна.

§ 8. Группа параллельных переносов

В случае группы параллельных переносов матрица C имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} 0, & x_1, & \ldots, x_n, & 1 \\ 2\sum\limits_{i,k}^{n} a_{ik}x_k t_i^{(1)}+f(t_i^{(1)}), & x_1+t_1^{(1)}, & \ldots, x_n+t_n^{(1)}, & 1 \\ 2\sum\limits_{i,k}^{n} a_{ik}x_k t_i^{(2)}+f(t_i^{(2)}), & x_1+t_1^{(2)}, & \ldots, x_n+t_n^{(2)}, & 1 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 2\sum\limits_{i,k}^{n} a_{ik}x_k t_i^{(w)}+f(t_i^{(w)}), & x_1+t_1^{(w)}, & \ldots, x_n+t_n^{(w)}, & 1 \end{pmatrix}$$

Каждый определитель $D_{i_1 i_2 \ldots i_n, p}(x_i, a_k)$, составленный из строк этой матрицы C, можно представить в виде суммы определителей:

$$2\sum_{i,k}^{n} a_{ik}\begin{vmatrix} 0, & x_1, & \ldots, x_n, & 1 \\ x_k t_i^{(i_1)}, & x_1+t_1^{(i_1)}, & \ldots, x_n+t_n^{(i_1)}, & 1 \\ x_k t_i^{(i_2)}, & x_1+t_1^{(i_2)}, & \ldots, x_n+t_n^{(i_2)}, & 1 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ x_k t_i^{(i_n)}, & x_1+t_1^{(i_n)}, & \ldots, x_n+t_n^{(i_n)}, & 1 \\ x_k t_i^{(p)}, & x_1+t_1^{(p)}, & \ldots, x_n+t_n^{(p)}, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0, & 0, & \ldots, 0, & 1 \\ f(t_i^{(i_1)}), & t_1^{(i_1)}, & \ldots, t_n^{(i_1)}, & 1 \\ f(t_i^{(i_2)}), & t_1^{(i_2)}, & \ldots, t_n^{(i_2)}, & 1 \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ f(t_i^{(i_n)}), & t_1^{(i_n)}, & \ldots, t_n^{(i_n)}, & 1 \\ f(t_i^{(p)}), & t_1^{(p)}, & \ldots, t_n^{(p)}, & 1 \end{vmatrix}$$

Очевидно, что определители первой суммы равны нулю. Таким образом, матрица C будет иметь следующий вид:

$$C=\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1 \\ f(t_i^{(1)}), & t_1^{(1)}, & t_2^{(1)}, & \ldots, & t_n^{(1)}, & 1 \\ f(t_i^{(2)}), & t_1^{(2)}, & t_2^{(2)}, & \ldots, & t_n^{(2)}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(t_i^{(w)}), & t_1^{(w)}, & t_2^{(w)}, & \ldots, & t_n^{(w)}, & 1 \end{pmatrix}$$

В этом случае группой Ψ является группа E (триклинная). Поэтому многообразие Бравэ представляет весь конус **K** положительных форм, и приведенной частью B при нашем выборе приведения будет весь гоноэдр Φ Эрмита—Минковского. Учитывая последнее и то, что элементы матрицы C не зависят от координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. разбиение $\{L_A\}$ не зависит от выбора точки A, областью B_{qG} будет гоноэдр Φ Эрмита—Минковского. Независимость топологии и метрики разбиения $\{L_A\}$ от выбора точки A непосредственно следует из того, что фундаментальная область нормализатора группы T есть точка.

Алгебраическая система для звезды L_A фазовой области общего типа будет состоять из линейных однородных неравенств только относительно a_{ik}, для звезды специального типа — из линейных однородных неравенств и линейных уравнений.

Решая конечное число алгебраических линейных систем, найдем все области типа, на которые разбивается гоноэдр Ф.

Рассматриваемый здесь метод, опирающийся в основном на теорему § 4, является новым методом для решения задачи Вороного, не использующим ни «фундаментальную» теорему Вороного, ни принцип Эрмита, ни алгорифм перестройки симплексов.

Фазовые области, получаемые рассмотренным в этой работе методом, являются пересечениями областей типов Вороного с гоноэдром Ф Эрмита—Минковского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Делоне. Теория планигонов. Изв. АН СССР, серия матем., 23, 365—386, 1959.
2. Б. Н. Делоне. Геометрия положительных квадратичных форм. УМН, вып. III, 16—62, 1937.
3. B. Delaunay. Sur la sphere vide. Изв. АН СССР, 6, 793—800, 1934.
4. Г. Ф. Вороной. Исследования о примитивных параллелоэдрах. Собр. соч., т. II, изд-во АН УССР, Киев, 1952.
5. H. Minkowski. Diskontinuitätsbereich für arithemetische Äquivalenz. Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, 70—72, 1911.
6. H. Zassenhaus. Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. Commentarii mathematici Helvetici, 21, 117—141, 1948.