РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ЭМПИРИЧЕСКИЙ ЗАКОН ТИЦИУСА-БОДЕ

П. Н. Антонюк
МГТУ им. Н. Э. Баумана

Аннотация. Характеризующий Солнечную систему закон Тициуса-Боде представлен разностным уравнением, с помощью которого установлена математическая связь планетных расстояний с итерациями метода Ньютона. Высказана гипотеза о применимости этого уравнения к планетам в других звёздных системах.

1. Введение. Известны различные попытки найти дискретный закон пространственного распределения планет в Солнечной системе. Например, Иоганн Кеплер (1571-1630) в «Космографической тайне» сопоставил орбитам планет последовательность концентрических сфер, вписанных или описанных вокруг вложенных друг в друга правильных многогранников, называемых телами Платона. Солнечная система была представлена последовательностью геометрических фигур возрастающего объёма: сфера Меркурия, октаэдр, сфера Венеры, икосаэдр, сфера Земли, додекаэдр, сфера Марса, тетраэдр, сфера Юпитера, куб, сфера Сатурна. Георг Вильгельм Фридрих Гегель (1770 – 1831) в своей философской диссертации «Об орбитах планет» связал планетные расстояния с числовой последовательностью

1; 2; 3; 4; 9; 16; 27,

содержащей степени двойки и тройки. Наиболее удачным оказался так называемый закон Тициуса-Боде.

2. Эмпирический закон Тициуса-Боде. Немецкие астрономы Иоганн Даниель Тициус (1729-1796) и Иоганн Элерт Боде (1747-1826) во второй половине 18 века предложили эмпирическую формулу для средних расстояний планет от Солнца, измеренных в астрономических единицах:

$$r_n = a + b \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbf{Z}) . \tag{1}$$

Здесь $a = 0{,}4$; $b = 0{,}3$. $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел. Каждая планета имеет свой номер n : $n = -\infty$ (Меркурий), $n = 0$ (Венера), $n = 1$ (Земля), $n = 2$ (Марс), $n = 3$ (пояс астероидов или гипотетическая планета Фаэтон), $n = 4$ (Юпитер), $n = 5$ (Сатурн), $n = 6$ (Уран). Нептун из этой зависимости выпадает. Допустимыми являются такие значения n , которым соответствуют целочисленные значения степени двойки.

Недавно в астероидном поясе Койпера (обширной зоне, лежащей за орбитой Нептуна) было открыто несколько планетообразных тел: 136199 Эрида (Эрис, Ксена, 2003 UB313), 136108 Санта (2003 EL61), 90337 Седна (2003 VB12), 136472 Истербанни (2005 FY9), 90482 Оркус (2004 DW), 50000 Квавар (2002 LM60) и так далее. Кроме того, в поясе Койпера находятся еще два значительных по размерам планетообразных тела, открытые в 20 веке: 134340 Плутон и 134340 I Харон. Эти два тела образуют двойную систему, барицентр (общий центр масс) которой находится в открытом космосе (вне Плутона и вне Харона). Ещё только предстоит систематизировать все эти тела и осмыслить их роль в рамках закона Тициуса-Боде. Трудно также понять имеет ли какое-либо отношение к закону Тициуса-Боде кометное облако Оорта, важный объект Солнечной системы.

Данная последовательность $\{ r_n \}$ планетных расстояний удовлетворяет аддитивному линейному разностному уравнению

$$2\, r_{n-1} + r_{n+1} = 3\, r_n \qquad (n \in \mathbf{Z}) . \tag{2}$$

С другой стороны, общее решение уравнения (2) представляется формулой (1) с произвольными константами a и b . С последним уравнением связано ещё одно разностное уравнение

$$r_{-\infty} + r_{n+1} = 2\ r_n \qquad (r_{-\infty} = a) , \tag{3}$$

являющееся первым интегралом уравнения (2).

3. Асимптотическое разностное уравнение метода Ньютона. Последовательные приближения x_n к корню x_* уравнения $f(x)=0$ могут быть найдены при помощи нелинейного разностного уравнения

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad . \tag{4}$$

При $n \to +\infty$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_*. Формула (4) лежит в основе метода Ньютона, или метода касательных, широко применяемого для решения уравнений. Метод Ньютона позволяет решать алгебраические и трансцендентные уравнения, системы уравнений. Более того, этим методом решаются дифференциальные уравнения и функциональные уравнения (метод Ньютона-Канторовича).

При достаточно больших значениях номера n последовательность $\{x_n\}$ подчиняется асимптотическому мультипликативному линейному разностному уравнению

$$y_{n-1}^2 \cdot y_{n+1} = y_n^3 \qquad (n \in \mathbf{Z}) \ , \tag{5}$$

в котором последовательность $\{\ y_n = x_n - x_*\ \}$ задаёт погрешности, или ошибки, для приближённых значений x_n корня x_*. Если $n \to +\infty$, то $x_n \to x_*$, $y_n \to 0$. Уравнение (5) имеет общее решение

$$y_n = A \cdot B^{2^n} \qquad (n \in \mathbf{Z}) \tag{6}$$

и первый интеграл

$$y_{-\infty} \cdot y_{n+1} = y_n^2 \qquad (y_{-\infty} = A). \tag{7}$$

Здесь A и B – произвольные константы.

Вместо погрешности $y_n = x_n - x_*$ можно также рассматривать точность

$$d_n = -\lg |\, y_n \,|$$

для приближённых значений x_n корня x_*. Если $n \to +\infty$, то $y_n \to 0$, $d_n \to +\infty$. Используемый здесь десятичный логарифм связан с выбором десятичной системы счисления. Число правильных (верных) десятичных знаков, взятых после запятой, для приближённого значения x_n корня x_* определяется как целая часть точности: $D_n = [\, d_n \,]$. В случае выбора системы счисления с основанием p, отличным от десяти, точность приближённых значений x_n корня x_* будет задаваться аналогичной формулой

$$d_n = -\log_p |\, y_n \,| \ .$$

Уравнения (5), (6) и (7), характеризующие погрешность, могут быть также переписаны для точности:

$$2\, d_{n-1} + d_{n+1} = 3\, d_n \qquad (n \in \mathbf{Z}) \ , \tag{8}$$

$$d_n = \alpha + \beta \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbf{Z}) \ , \tag{9}$$

$$d_{-\infty} + d_{n+1} = 2\ d_n \ \ (\ d_{-\infty} = \alpha\ ). \tag{10}$$

Здесь α и β – произвольные константы.

4. Математическая эквивалентность уравнений. Уравнения (1), (2), (3) для планетных расстояний и уравнения (6), (5), (7) для погрешностей в методе Ньютона математически эквивалентны друг другу, но отличаются формой записи: в первом случае имеет место аддитивная форма записи, во втором – мультипликативная. Рассмотрение точности вместо погрешности позволяет уйти от мультипликативной формы записи к аддитивной. В результате приходим к следующему выводу: планетные расстояния и точности в методе Ньютона описываются одинаково, так как уравнения (1), (2), (3) идентичны уравнениям (9), (8), (10).

5. Статус Плутона и его роль в законе Тициуса-Боде. 76 лет Плутон считался девятой планетой Солнечной системы с момента его открытия 18 февраля 1930 года Клайдом Томбо. Но 24 августа 2006 года в Праге 26-я Генеральная ассамблея Международного астрономического союза лишила Плутон статуса планеты. Одновременно ассамблея приняла следующее определение планеты в Солнечной системе: «Планета − это небесное тело, которое (a) обращается вокруг Солнца, (b) имеет достаточную массу, для того, чтобы самогравитация превосходила твердотельные силы и тело могло принять гидростатически равновесную (близкую к сферической) форму, и (c) очищает окрестности своей орбиты (т.е. рядом с планетой нет других сравнимых с ней тел)». Плутон не соответствует этому определению, поэтому число планет в Солнечной системе сократилось с девяти до восьми. Аналогично, с момента, когда 22 июня 1978 года был открыт Харон, он считался спутником планеты Плутон до 24 августа 2006 года. Сегодня Харон перестали считать спутником Плутона и рассматривают его как часть двойной системы Плутон-Харон. Когда Плутон был планетой, в законе Тициуса-Боде ему приписывался номер $n = 7$. Новый статус Плутона формально исключает его из закона планетных расстояний.

6. Заключение. В настоящей работе даны разностное уравнение (2) и его первый интеграл (3), описывающие планетные расстояния в соответствии с законом Тициуса-Боде. Кроме того, при помощи этих уравнений установлена математическая связь последовательности планетных расстояний с последовательностями погрешностей и точностей в итерационном методе Ньютона. Асимптотическая универсальность метода Ньютона (уравнение (5) для $\{x_n\}$ не зависит от конкретного вида функции f) и аналогия между последовательностями $\{y_n\}$, $\{d_n\}$, с одной стороны, и $\{r_n\}$, с другой стороны, приводят к гипотезе о возможной универсальности разностного уравнения (2), представляющего закон Тициуса-Боде: уравнение (2) определяет средние расстояния планет в других звёздных системах (а не только в Солнечной системе). Каждой звёздной системе соответствуют свои значения констант a и b .

Закон Тициуса-Боде в простой математической форме отражает сложные процессы самоорганизации планет, происходящие в Солнечной системе. Физический смысл этих процессов пока не удается понять.