

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Потапов А.А., Герман В.А.

Институт радиотехники и электроники РАН

potapov@mail.cplire.ru

В работе представлены некоторые способы измерения фрактальной размерности D и фрактальных сигнатур, широко применяемые в практике естественных наук (Потапов, 2002; 2005; 2006). Корреляционная размерность часто используется для объектов больших размерностей, особенно в тех случаях, когда наблюдается не весь объект, а только его сечение гиперплоскостью меньшей размерности. При этом выборка не обязана быть упорядоченной. Примером может служить анализ временных рядов, когда для наблюдения доступна только одна переменная системы (напряжение, ток, яркость и т.д.). Однако аттрактор такой системы и фазовое пространство, в которое он вложен, могут иметь большую размерность, то есть система имеет скрытые переменные.

Для оценки размерности вложения используют два подхода. Первый состоит в многократном дифференцировании (или интегрировании) входного ряда. Второй состоит в восстановлении некоторого «похожего» на исходный аттрактор последовательным сдвигом на половину орбитального периода. Такой метод называется методом Гроссбергера – Прокаччия (Grassberger, Procaccia, 1983). Если первый подход чрезвычайно чувствителен к шумам, то метод Гроссбергера – Прокаччия во многом свободен от этого недостатка. Для оценки размерности вложения, последовательно получают новые размерности либо дифференцированием, либо сдвигом и измеряют «длину» получившегося многомерного ряда. После некоторого значения «длина» перестает увеличиваться, что говорит о достижении размерности вложения.

Вместо понятия «длина» в нашем случае используется корреляционный показатель $C(r)$. Корреляционный показатель – это вероятность того, что временной ряд содержит пару точек расстояние, между которыми не превышает r . Вычисление корреляционного показателя начинается с малых значений r по формуле:

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1;i \neq j} \eta(r - |X_i - X_j|) \quad (1)$$

где $\eta(z)$ - функция Хевисайда, N - число наблюдений, r - расстояние, X_i, X_j - элементы выборки. Корреляционный интеграл (1) есть вероятность, того, что две точки, выбранные случайным образом на фазовой траектории системы, удалены друг от друга на расстояние меньше r . Очевидно, что

$$\frac{dC(r)}{dr} \approx r^{D_c},$$

отсюда

$$\log(C(r)) = D_c \log r + const, \quad D_c = \frac{\log(C(r)) - const}{\log r} \quad (2)$$

Полученное значение D_c и называется в литературе корреляционной размерностью.

Как уже отмечалось вычисление корреляционной размерности удобно для анализа временных рядов на предмет поиска в этих рядах сложных закономерностей. Очевидно, что для определения таких закономерностей, необходимо определить количество всех переменных системы. Это затруднительно, так как, зачастую, из многих переменных наблюдается только одна, однако, существуют методы позволяющие определить все остальные «скрытые» переменные.

Рассмотрим далее некоторые из таких методов. Пусть наблюдается скалярная функция времени $f(t)$. Найдем последовательно производные по времени: $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$. Далее последовательно строим семейства фазовых пространств от $\{f(t), f'(t)\}$ до $\{f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)\}$ и вычисляем в каждом из них корреляционные интегралы $C(r)$ вида (1). После некоторой итерации, значение $C(r)$ перестанет существенно меняться, что будет свидетельствовать о достижении размерности вложения и об установлении числа независимых переменных системы.

Такой метод позволяет точно восстановить фазовые траектории системы, но, к сожалению, только теоретически. На практике наблюдается не непрерывная функция $f(t)$, а дискретное множество дискретных значений $\{F(0), F(\Delta t), F(2\Delta t), \dots, F(k\Delta t)\}$. Шумы дискретизации и квантования с каждым новым порядком дифференцирования будут все существеннее и, в конце концов, будут доминировать в наблюдениях.

Вместо дифференцирования можно использовать и последовательное интегрирование, такое преобразование уменьшит шумы, однако, оно же сведет на нет многие скрытые переменные.

Из-за описанных выше причин метод последовательного дифференцирования используется лишь в теоретических расчетах и в некоторых задачах связанных с визуализацией фазовых траекторий исследуемой диссипативной системы (рис. 1).

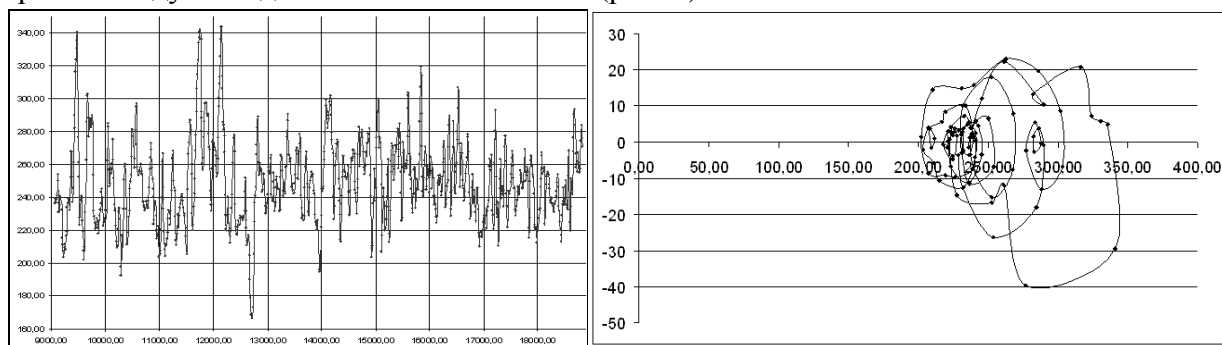


Рис. 1. Пример построения фазового портрета (справа) в координатах $\{x(t), x'(t)\}$ временного ряда радиолокационных отражений (слева) на коротких миллиметровых радиоволнах.

Другой метод восстановления фазового пространства системы был предложен Рюэлем и Такенсом (Ruelle, Takens, 1971). Идея метода состоит в следующем. Любая динамическая система должна через некоторое конечное время принимать положение сколь угодно близкое к исходному, о чем говорит известная теорема Пуанкаре «о возвратах». Можно определить среднее время возврата или цикл Пуанкаре:

$$\tau = \frac{t \sum_{k=1}^{\infty} k P_k}{\sum_{k=1}^{\infty} P_k}, \quad (3)$$

где P_k - вероятность возврата системы в исходную область за время kt .

Известно, что величина цикла Пуанкаре для систем из большого числа частиц огромна. Однако, стохастическое поведение может возникать и в системе состоящей всего из нескольких степеней свободы, в этом случае время возврата доступно для наблюдения и оценки. Наличие в системе некоего цикла позволяет при исследовании поступить также как и в радиотехнике при обработке узкополосного сигнала – сдвинуть измеренную последовательность относительно себя на «половину периода». «Периодом» в данном случае является оцененное значение среднего времени возврата τ .

Было доказано, что фазовое пространство, восстановленное таким образом имеет ту же самую размерность и тот же спектр показателей Ляпунова, что и исходное пространство. Для примера, рассмотрим нелинейное отображение известное, как отображение Хенона (Хенон, 1976):

$$x_{t+1} = 1 - 1,4x_t + y_t,$$

$$y_{t+1} = 0,3x_t,$$

На рис. 2 показано значение x_t для первой сотни шагов этого отображения при начальных условиях $x_0 = 0, y_0 = 0$.

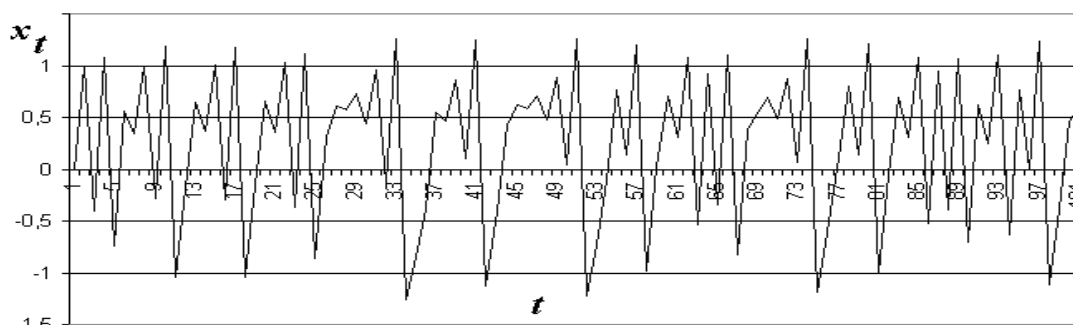


Рис. 2. Временная диаграмма одной переменной отображения Хенона.

Из данных рис. 2 видно, что переменная x_t проходит значение 0 в среднем каждые 3 шага. То есть, средним временем возврата можно считать 2 шага и, тогда для восстановления второй переменной необходимо сдвинуть ряд рис. 2 на один шаг и получить новый ряд - x'_t . Далее, можно построить двумерное пространство с точками (x_t, x'_t) , построение показано на рис. 3.

На рис. 3 показаны восстановленные методом Гроссбергера траектории отображения Хенона (треугольники, цифра 1) и исходные фазовые траектории этого отображения (квадраты, цифра 2), причем исходные траектории нарисованы одновременно с траекториями восстановленными методом последовательного дифференцирования. Как отмечалось, ранее метод последовательного дифференцирования обеспечивает точное восстановление траекторий системы.

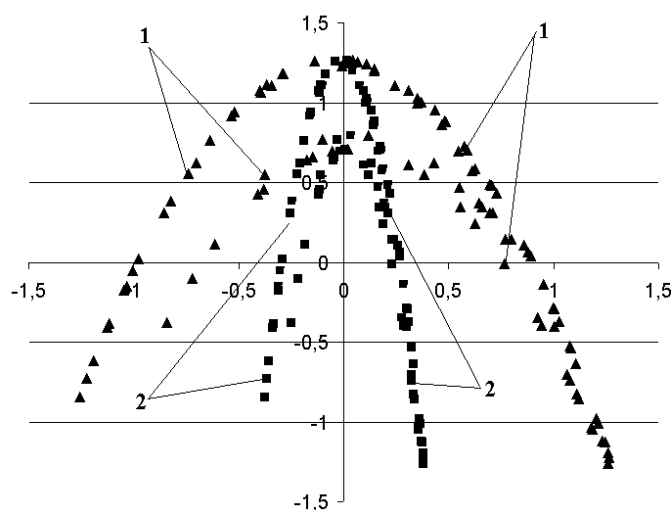


Рис. 3. Фазовые траектории отображения Хенона.

В случае стохастических структур, когда не требуется восстановления полного фазового портрета системы, удобно использовать еще один вид размерности. Такими структурами могут быть, например, стохастические фрактальных сцены или одномерные фрактальные сигналы. В качестве обоснования данного метода используется тот факт, что спектральная плотность $S(\omega)$ фрактальных сигналов имеет вид:

$$S(\omega) \approx \omega^{-D_\omega}. \quad (4)$$

Спектральная плотность мощности динамического процесса $x(t)$ вследствие аperiodической "шумоподобной" его структуры вычисляется как преобразование Фурье от интенсивности процесса, и представляет собой непрерывную функцию частоты $S(\omega)$. В качестве характеристик при анализе такого динамического процесса могут быть использованы: вид функции частоты $S(\omega)$ и ее свойства, наличие четко выраженных максимумов на характерных частотах, диапазон частот, который включает основную энергию колебаний и т.д.

Спектр мощности $S(\omega)$, по теореме Винера - Хинчина, связан через преобразование Фурье с автокорреляционной функцией процесса $X(t)$. Данное обстоятельство позволяет строить высокоэффективные алгоритмы и устройства вычисляющие автокорреляционную функцию $C_1(r)$ При этом автокорреляционная функция, будет иметь вид спадающей по времени τ (или по расстоянию r) функции. Для аппроксимированной автокорреляционной функции $C(r)$ характерна степенная закономерность вида

$$C_1(r) = \frac{1}{r^k}, \quad (5)$$

где k - некоторый показатель степени.

Известно, что показатель степени k и фрактальная корреляционная размерность связаны следующим соотношением:

$$D = E_n - k, \quad (6)$$

где E_n - евклидова размерность пространства.

Как известно, при $r=0$ или $\tau = 0$ значение автокорреляционной функции совпадает с моментом второго порядка процесса или, с дисперсией σ_x^2 . Однако, прямое использование формул (5) и (6) для оперативных оценок D неудобно.

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S(\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \Omega$, $\Omega < \infty$.

По теореме Винера – Хинчина $\int_0^\infty S(\omega)d\omega = \int_0^\Omega S(\omega)d\omega = C_1(0) = \sigma_1^2$. Пусть, далее, согласно (4)

$S(\omega) \approx \omega^{D_\sigma}$, тогда

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{-D_\sigma + 1} \omega^{(-D_\sigma+1)} \Big|_0^\Omega,$$

Если произвести фильтрацию процесса X , так чтобы его полоса составила $\Omega/2$, то получим:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{-D_\sigma + 1} \omega^{(-D_\sigma+1)} \Big|_0^{\Omega/2}.$$

Не обращая внимание на деление на 0 при $D_\sigma > 1$, найдем отношение

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 2^{(-D_\sigma+1)},$$

что позволяет получить

$$D_{\sigma} = 1 - \log_2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad (7)$$

или, если спектр обрезается с масштаба m до масштаба n , то

$$D_{\sigma} = 1 - \frac{\log \sigma_1^2 - \log \sigma_2^2}{\log m - \log n} \quad (8)$$

Логарифм в (8) может быть взят по любому основанию, критерием является только удобство. Полученные соотношения (4) – (8) являются основой предложенного авторами так называемого «локально - дисперсионного метода» измерения фрактальных размерностей, фрактальных сигнатур и фрактальных «кепстров» (Potapov, German, 1998).

Сравним оценки фрактальной размерности D , вычисленной разными методами для, рассмотренного ранее отображения Хенона и процесса Винера – процесса с нормальными стационарными приращениями. На рис. 4 показан характерный вид винеровского процесса.

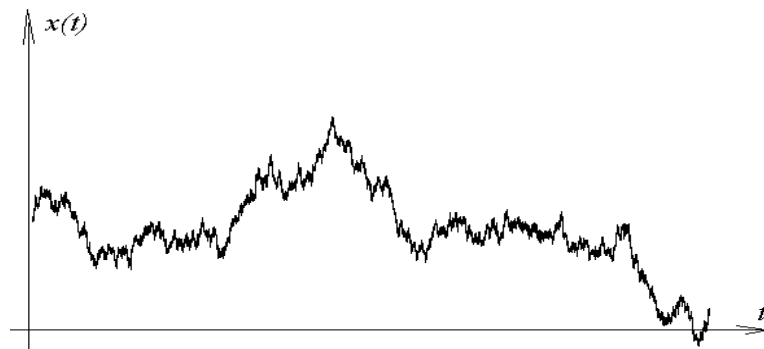


Рис.4. Случайный процесс с независимыми нормальными приращениями.

Спектр такого процесса, а в данном случае, его реализации представленной на рис.4, имеет вид представленный на рис. 5.

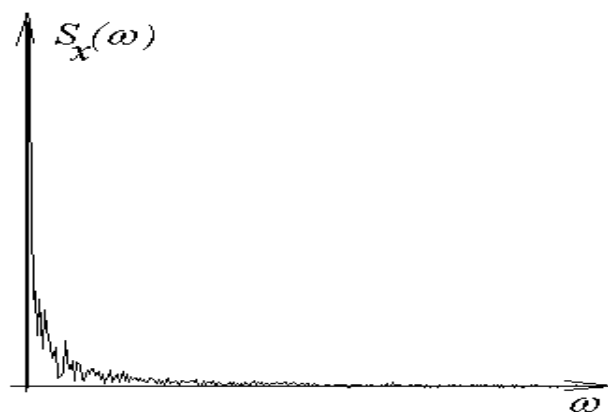


Рис.5. Энергетический спектр процесса с независимыми приращениями.

Представленный спектр аппроксимируется степенной зависимостью с некоторым дробным показателем. Измерения, проведенные с помощью масштабирования и измерения «длины» последовательности дают значения $D_L = 1,48$. Измерения с помощью оценки дисперсии дают $D_{\sigma} = 1,505$, а с помощью измерения корреляционного интеграла $D_C = 1,66$.

Отображение Хенона имеет теоретическую размерность $D=1,25$. Спектр отображения представлен на рис. 6. Такой спектр достаточно плохо представим в виде степенного закона, однако, оценка $D_\sigma=1,29$ является приемлемой, с учетом того, что $D_L=1,25$ (значение, полученное авторами $D_L=1,22$). Значение D_C для этого отображения получается равным 1,3.

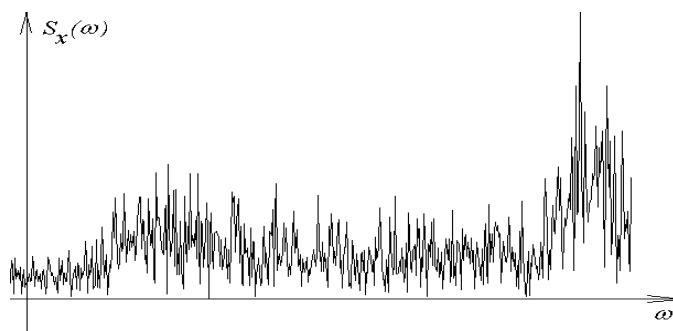


Рис. 6. Энергетический спектр отображения Хенона.

Фрактальные методы являются принципиально новыми методами обработки полей и сигналов. Они используют дробную топологическую размерность пространства сигналов и изображений, математический аппарат дробных интегралов и производных (дробных операторов) и свойства самоподобия или скейлинга. Созданные авторами методы и алгоритмы вычисления фрактальных размерностей, фрактальных сигнатур, а также фрактальных кепстров, работоспособны в очень широком диапазоне физических размеров характерных деталей изображений и позволяют легко находить и детектировать эффекты скейлинга, даже замаскированные интенсивными негауссовскими или импульсными шумами. По данному фрактальному направлению выпущено несколько монографий и опубликовано около 200 научных работ.

В результате чтения лекций по разработанным А.А. Потаповым с 80-х гг. в ИРЭ РАН фрактальным технологиям и докладам по проекту МНТЦ в 2000 г. и 2005 г. в США (Вашингтон, Нью Йорк, Хантсвилл, Атланта, Франклин) в декабре 2005 г. американскими специалистами в официальном письме на имя директора ИРЭ РАН академика Ю.В. Гуляева было отмечено, что "...Семинары были крайне интересны и подтвердили высокую научную квалификацию доктора А. Потапова. Радиолокационные технологии, представленные доктором А. Потаповым, основаны на теории фракталов и являются новыми. Важность этих исследований для международного сообщества специалистов и ученых неоспорима". Тогда же состоялась научная встреча А.А. Потапова с основателем фрактальной геометрии Б. Мандельбротом.

Список литературы

- Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002. 664 с.
 Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с. (Изд. 2-е, перераб. и доп.).
 Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах // Дополнение к книге: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Пер. с англ. под ред. Кренкеля Т.Э. М.: Техносфера, 2006. С. 374 - 479.
 Grassberger P., Procaccia I. Characterization of Strange Attractors // Phys. Rev. Lett., 1983, vol.50, № 5, p. 346 – 349.
 Potapov A.A., German V.A. Detection of Artificial Objects with Fractal Signatures // Pattern Recognition and Image Analysis, 1998, vol. 8, p. 226 - 229.
 Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence // Commun. Math. Phys., 1971, vol. 20, p. 167 – 192.
 Xenon M. A Two – Dimensional Mapping with a Strange Attractor // Commun. Math. Phys., 1976, vol. 50, p. 69 – 77.