Из книг А. В. Фёдорова

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ СОЮЗА ГОРНОРАБОЧИХ СССР

Н. К. РАЗУМОВСКИЙ

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КУБУЧ
ЛЕНИНГРАД
1927

Глубокоуважаемому
Александру Евгеньевичу
Ферсману
от автора 15/XI 27 г.

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ СОЮЗА ГОРНОРАБОЧИХ СССР

Н. К. РАЗУМОВСКИЙ

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

ЛЕКЦИИ, ЧИТАННЫЕ НА ГЕОЛОГО-
РАЗВЕДОЧНОМ ФАКУЛЬТЕТЕ
В 1926—27 УЧЕБНОМ ГОДУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КУБУЧ
ЛЕНИНГРАД
1927

Ленинградский Гублит № 44160. Тираж 1000—6 л. Заказ № 2685.

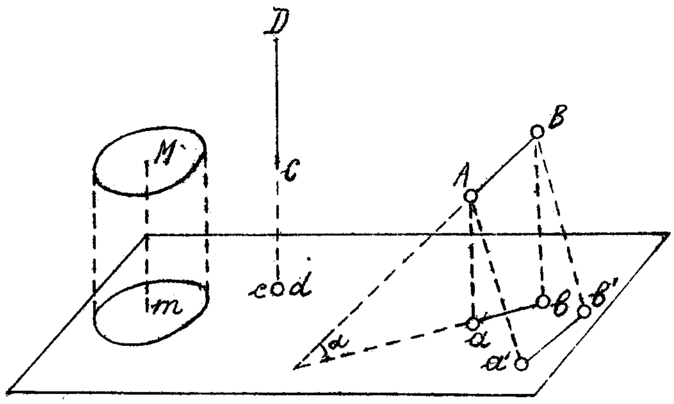
ГЛАВА I.ПРОЕКЦИИ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ.

§1.Понятие о проекции.

Слово "проекция" нам известно из элементарной геометрии:проекцией точки A на плоскость называется основание перпендикуляра a,опущенного из данной точки на плоскость (черт.1).Проекцией отрезка AB называется отрезок ab между проекциями его крайних точек,равный по величине:

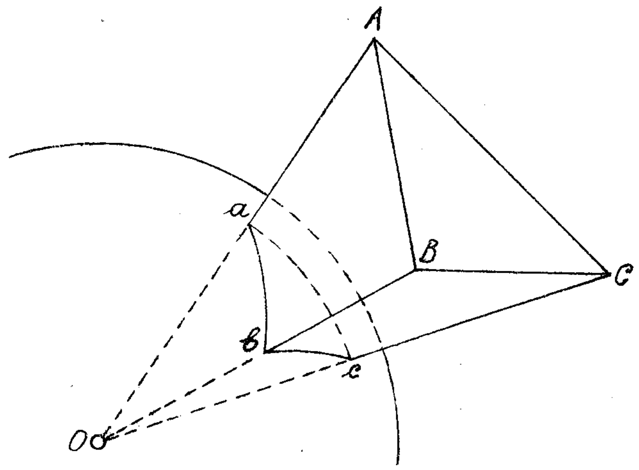
$$ab = AB.\cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

где α - угол,составляемый линией AB с плоскостью проекции.Так как всякую фигуру можно себе представить состоящей из линий и точек, то понятно,что для всякой прямолинейной или криволинейной фигуры можно найти ее проекцию на заданную плоскость



Черт.I.

(черт.1 - M и m).В этом случае нам задана плоскость и способ построения проекции - опускание перпендикуляра.Можно распространить понятие о проекции на всякую фигуру,полученную из данной фигуры при помощи какого либо построения на плоскости или в пространстве.Например,вместо перпендикуляров мы можем при проектировании взять ряд наклонных линий,параллельных между собой,Aa',Bb'и проектировать ими на ту же плоскость (черт.1 - a'b').Или взять ряд прямых, проходящих через данную точку ("пучек прямых" как говорят) и ими проектировать фигуру на поверхность шара (черт.2). В этих примерах мы получаем различные проекции данной фигуры, иногда совсем на нее непохожие. Общим лишь является то, что построение связывает между собой однородные образы: проекция точки будет точка же, линии - линия. Но геометрические построения могут связывать и разнородные элементы. Даже при обычном проектировании возможен частный случай, когда проекцией линии будет точка - в случае если проектируемая линия перпендикулярна к плоскости проекции (черт. 1 - cd). Обратно,- каждую точку плоскости можно считать проекцией перпендикуляра, восстановленного к плоскости в этой точке. Еще пример: через центр шара проведем прямую; она пересечет поверхность шара в двух диаметрально противоположных точках, которые можно считать п р о е к ц и е й данной линии на шаровую поверхность. Здесь для линии будут соответствовать два элемента иного рода - 2 точки.



Черт.2.

Дадим теперь определение.

П р о е к ц и е й данного геометрического образа называется другой геометрический образ, или несколько образов, однородные с исходным или неоднородные, и связанные с данным образом наперед заданным геометрическим построением. Если образы однородны, то говорят, что они г о м о л о г и ч н ы, если разнородны, то к о р р е л я т и в н ы.

Очевидно, если по данному образу мы найдем построением его проекцию, то и из проекции, обратным построением, можем найти исходный образ. Решение вообще будет многозначным, но путем введения дополнительных условий его можно сделать однозначным. Например, для обычного, прямоугольного проектирования на плоскость можно задать плоскость, в которой лежит исходная фигура, или дать проекцию той же фигуры на вторую плоскость. Следовательно, между связанными образами принципиального различия нет и каждый из них можно считать проекцией другого. Назовем такую пару геометрических элементов - линий, точек или отрезков, - связанных общим геометрическим построением - проективной парой. В частности если элементы однородны - гомологичной парой, если разнородны - коррелятивной парой.

Пример гомологичной пары: точка фигуры M и точка m основание перпендикуляра, опущенного на плоскость проекций (черт.1); примеры коррелятивной пары: диаметр шара ZZ' и 2 точки его пересечения с шаровой поверхностью Z и Z' (черт.5); точка плоскости и перпендикуляр к плоскости в этой точке; точка и прямая, через нее проходящая в заданном направлении и пр.

Каждый геометрический элемент или образ мы можем сочетать с ему подобными в образы высшего порядка: точки в линии и поверхности; линии в поверхности и пр.; при этом мы можем двояко представлять себе такое сочетание сплошным и тогда мы получим образ высшего порядка - сплошной ряд точек будет линия, ряд линий даст поверхность и т.д. или раздельным, т.е. таким, при котором не теряется индивидуальность каждого низшего элемента (подобно тому как под "толпой", мы понимаем совокупность людей, ее составляющих) такое сочетание, закономерно выделенное из ряда других возможных каким-либо условием, мы назовем геометрической системой а условие, которому подчиняются все элементы этой системы - в ы д е л я ю щ и м у с л о в и е м. Примеры: Все точки пространства,отстоящие от данной О на 10 см. образуют поверхность шара радиуса 10 см.Это слитное представление.Совокупность же бесконечного числа точек лежащих на сфере радиуса 10 см.- будет геометрическое место.Или:отрезок прямой в 10 см,вращаясь около точки О во всех направлениях,даст нам тело - шар.Но совокупность отрезков,рассматриваемых отдельно,приводит нас к понятию "пучка" прямых,проходящих через одну точку пространства.

Еще яснее выступает это различие представлений при следующих рассуждениях.

Возьмем совокупность точек лежащих на прямой линии. Так как мы считаем,что точка не имеет размеров,то между любыми двумя точками на заданной прямой,как бы близко они ни лежали друг к другу,мы всегда можем вообразить еще новую точку;точно также,и в обе стороны по прямой мы можем как угодно далеко намечать все новые точки,число которых можем сделать очевидно,как угодно большим.Поэтому говорят,что точек,удовлетворяющих условию нахождения на заданной прямой - бесконечное число; точнее было бы сказать - неограниченное число. Теперь рассмотрим,сколько можно вообразить отрезков,разнообразной длины,от очень маленьких,до очень больших,целиком лежащих на данной прямой.В этой геометрической системе мы можем,во первых,изменять положение начала отрезка (вектора) - оно может находиться в любой точке заданной прямой - а,во вторых,можем изменять величину вектора от как угодно малых до как угодно больших (условно говорят,от нуля до бесконечности).Следовательно, здесь две возможности,две свободы достигать разнообразия- мы можем менять и положение начала и величину вектора. О такой системе говорят,что она в т о р о й ступени или в т о р о й с т е п е н и с в о б о д ы. Например,совокупность точек на плоскости второй ступени, так как мы можем вообразить,что плоскость состоит из бесконечной совокупности параллельно лежащих линий-это одна свобода, да каждая линия - есть бесконечная совокупность точек - вторая свобода.

Зададимся вопросом - какая степень свободы имеется у совокупности отрезков, лежащих в данной плоскости и варьирующих как по величине, так и по направлению?

Точек на плоскости - ∞^2 (две свободы, как только что выяснено). Каждую точку плоскости делаем началом отрезка-вектора и варьируем их 1)по величине и 2)по направлению. Всего четыре свободы, четыре способа получать бесконечное, неограниченное сочетание элементов. Следовательно данная совокупность есть совокупность четвертой ступени, четвертой степени свободы. Отсюда мы видим, что в зависимости от условий, которым мы подчиняем нашу геометрическую систему она может быть разной ступени. Например, на плоскости могут быть системы как второй так и четвертой ступени (точки и вектора в вышеуказанных примерах). Следует подчеркнуть (мы это примем без доказательства) что применяя какое либо построение ко всем элементам геометрической системы, (т.е. проектируя) мы всегда придем к геометрической системе той же степени свободы, той же ступени. Если построение определяет гомологичную пару, то связь между геометрическими системами называется г о м о л о г и е й, если коррелятивную, то к о р р е л я ц и е й.

Итак, в самом общем случае - мы имеем закономерно выделенные геометрические системы или совокупности одной и той же ступени, и условие, связующее элементы этих систем, которое назовем с в я з ь ю.

Примеры I 1-ая система и выделяющее условие: точки данной шаровой поверхности (совокупность второй ступени). 2-ая система и выделяющее условие: линии проходящие через данную в пространстве точку. (Второй ступени). С в я з ь: (коррелятивная). Центр шара системы 1-ой совпадает с точкой пересечения лучей системы второй (черт.10).

Наши рассуждения носили чисто геометрический характер.Но связь между системами часто можно выражать в виде уравнений,примеры чему найдем в дальнейшем.

Теперь мы можем определить наш предмет.Учением о проекциях называется отдел геометрии,изучающий способы построения и свойства различных видов проективных систем (или "проекций" в широком смысле этого слова). В настоящем курсе мы с'узим нашу задачу и рассмотрим подробно только некоторые виды проектирования, особенно полезные при изучении свойств кристаллического вещества,а также имеющие приложение в геологии,петрографии и геодезии.

Построение проекций совершается на листе бумаги при помощи туши или карандаша и чертежных вспомогательных приборов.

На практике проекциями пользуются для упрощения и для большей доступности образов какой-либо геометрической системы.

Так как при построении всех точек проекций мы применим одно и то же нам известное построение,то мы можем по проекции обратным построением восстановить данную фигуру.Предполагается,что построение сделано точно т.е.без чертежных ошибок,поэтому по проекции можно так же изучать и количественные соотношения между геометрическими фигурами (практически с той точностью, которую позволяет техника черчения).Например,взяв проекции двух отрезков,измерив их и учтя искажение размеров при проектировании,мы можем сказать,какова величина отрезков в натуре,какой из них больше и во сколько раз. В этом существенное отличие п р о е к ц и и, т.е. точного изображения от наброска (эскиза) и рисунка.По проекции как бы ни было трансформировано изображение,можно изучать количественные соотношения между элементами фигур. Такой непрямой путь изучения бывает полезен в тех случаях,когда исходная геометрическая система плохо доступна для измерений или недостаточна наглядна. Пространственные системы вообще говоря, трудно поддаются измерению элементов и их взаимных расстояний. Поэтому, особенно важны те виды проекций, которые дают нам связь между пространственной геометрической системой и другой системой, находящейся на поверхности (чаще всего на плоскости), равно как и системы, преобразующие шаровую поверхность в плоскую (каковой являются, например, линейная и стереографическая проекции). Стремление к простоте заставляет проективность делать однозначной и обратимой. Впрочем последнее не всегда необходимо и в дальнейшем мы будем иметь пример необратимого преобразования (стр.18-20).

§2. Общий обзор проекций.

Проектировать можно самыми различными способами; очевидно видов проекции может быть бесконечное число. Все они делятся прежде всего, на г о м о л о г и и , когда связанные геометрические системы состоят из одних и тех же элементов, и к о р р е л я ц и и. Геометрические системы в гомологиях могут налегать друг на друга. Но всегда сходственные элементы располагаются в различных точках (или частях) пространства. Следовательно при всякой гомологии есть п е р е м е н а места в пространстве или п е р е н о с. Если соединим соответственные точки в гомологии прямыми, то возможны два случая.

1-ый более частный - все проектирующие прямые пересекаются в одной точке прастранства или друг другу параллельны (т.е. пересекаются в бесконечности).

1-ое семейство проекций гомологии называется - п е р с п е к т и в о й

и 2-ой случай - прямые не пересекаются в одной точке и не параллельны.

2-ое семейство проекций гомологии называется - н о н с п е к т и в о й.

Для корреляций, при которых связываются построением разнородные элементы, о переносе элементов говорить вообще затруднительно: здесь часто происходит лишь замена элемента другим не однородным.

О перспективе ниже речь пойдет подробно. Примером нонспективной гомологии может служить такое построение: В пространстве имеется бесконечное число как угодно расположенных линий; через некоторую точку пространства проведем линии соответственно параллельные линиям в пространстве. Пучек лучей будет связан нонспективной гомологией с прямыми пространства (черт.6).

Для нас важны следующие две простейшие корреляции:

Г н о м о к о р р е л я ц и я - когда при рассмотрении какой либо плоскости (напр.плоскость 4 черт.8) мы заменяем ее нормалью к плоскости (OZ). Положение нормали нам вполне охарактеризует положение плоскости в пространстве. И

С ф е р о к о р р е л я ц и я - Пусть мы имеем пучек прямых и плоскостей, проходящих через точку O пространства (черт.8). Описав около O шар, радиуса 10 см. (каковой радиус мы примем и в дальнейшем проектировании), мы можем рассматривать т о ч к и и д у г и б о л ь ш и х к р у г о в, получившиеся на поверхности шара в пересечении с линиями и плоскостями пучка, как элементы заменяющие линии и плоскости.

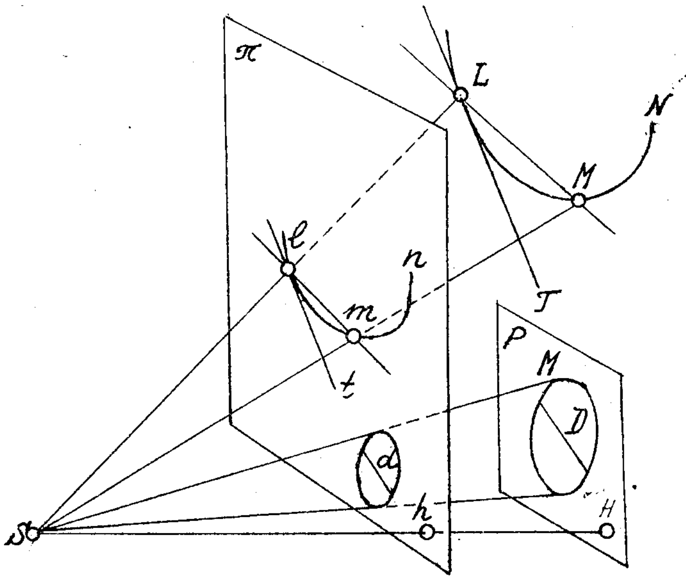
§3. Семейство перспектив.

Одно из важных семейств проекций есть гомология, называемая п е р с п е к т и в о й. Для ее построения где нибудь выбирается плоскость проекции π (черт.3) и вне этой плоскости точка S называемая "точкой зрения". Каждую точку изображаемой системы (например, кривой LMN) соединяют с S; точки пересечения лучей зрения SM, SL с π, т.е. точки m, l будут соответственными и проекцией кривой LMN будет плоская кривая lmn.

Здесь же отметим следующее важное свойство, принадлежащее всему семейству перспективных проекций. Для точек не бесконечно удаленных от плоскости π и не лежащих в плоскости, проходящей через S параллельно π – имеет место –

Теорема I: Проекция касательной к кривой сама касательна к проекции кривой (черт.3).

В самом деле, проведем секущую LM через точки L и M кривой. Построим ее проекцию lm и, двигая точку M по кривой, будем приближать ее к L. Секущая LM при этом будет приближаться к положению, занимаемому прямой T, которая и называется касательной к кривой LM в точке L. Но и проекция секущей lm, проходя через точки проекций кривой l и m, будет приближаться к некоторой прямой t, имеющей только одну точку общую с кривой lm и, следовательно, к ней касательной. Отсюда и заключаем, что lt есть проекция LT.*



Черт.3.

Положим, что мы хотим перенести изображение в плоскости P в другую ей параллельную по методу перспективы, имея точку зрения в S (черт.3). Тогда для каждого размера D фигуры M найдется ему соответственный d, при чем

$$\frac{D}{d} = \frac{SH}{Sh} = \frac{1}{q}$$

где SH – луч перпендикулярный к плоскостям π и P. Фигу-

*В.В.Каврайский – *Стереографическая проекция и ее построение [рукопись].*

ры будут подобны,а q явится коэффициентом пропорцио - нальности или масштабом. К этому виду перспективы прибегают тогда,когда приходится изображать небольшой участок земли,который можно принять за плоскость.Изображение называется планом.Этот же вид проектирования осу - ществляется физически (лучами света) в микроскопе.Если точка S удалена от плоскости π на ∞ ,то лучи SM, SL делаются параллельными.Если при этом SM перпендикулярен π ,то получается о р т о г о н а л ь н а я п р о е к ц и я, если SM не перпендикулярен к π ,то к о с о у г о л ь н а я. Обе они изучаются в начертательной геометрии.

Когда нам приходится изучать точки и линии,лежащие на поверхности шара,возникает задача о замене точек на шаре их изображением на плоскости,при чем в этом случае сохранить подобие конечных фигур невозможно.Способов изображать шаровую поверхность на плоскости предложено много.

Этот вопрос имеет особенное значение в астрономии (изображение звездного неба,принимаемого за сферическую поверхность) и в картографии при изображении земного шара.Здесь также возможно воспользоваться перспективой,при чем в зависимости от того,где поместить точку зрения и плоскость проекции,получаются разные проекции.

П р о е к ц и я л и н е й н а я (черт.4) точка зрения - в центре шара,а плоскость проекции касательна к шару.Линейную проекцию* впервые применил в астрономии Фалес Милетский,один из семи греческих мудрецов (640-548 до Р.Х.).

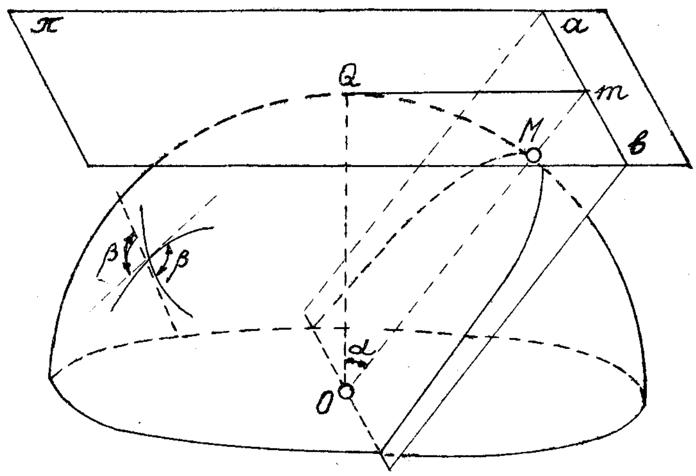
Линейная проекция точки M на шаре изобразится точкой m на плоскости проекций.Проекция дуги большого круга определяется плоскостью,проходящей через круг,и изобразится прямой линией.Как видим,изображения получаются просто и в виде легко вычерчиваемых образов - точек

---

*Эта проекция есть древнейшая известная из проекций вообще.

и прямых (если ограничиться только большими кругами на шаре, что в большинстве случаев достаточно). Если расстояние от постоянной на чертеже точки касания Q до проекции m назовем через x а угол наклона луча OM к OQ – – $\angle$ QOM через α, то

x = Qm = R tg α (2); т.е. чтобы узнать угол наклона направления OM к вертикали, надо измерить расстояние Qm и принять его за длину линии тангенса.



Черт. 4.

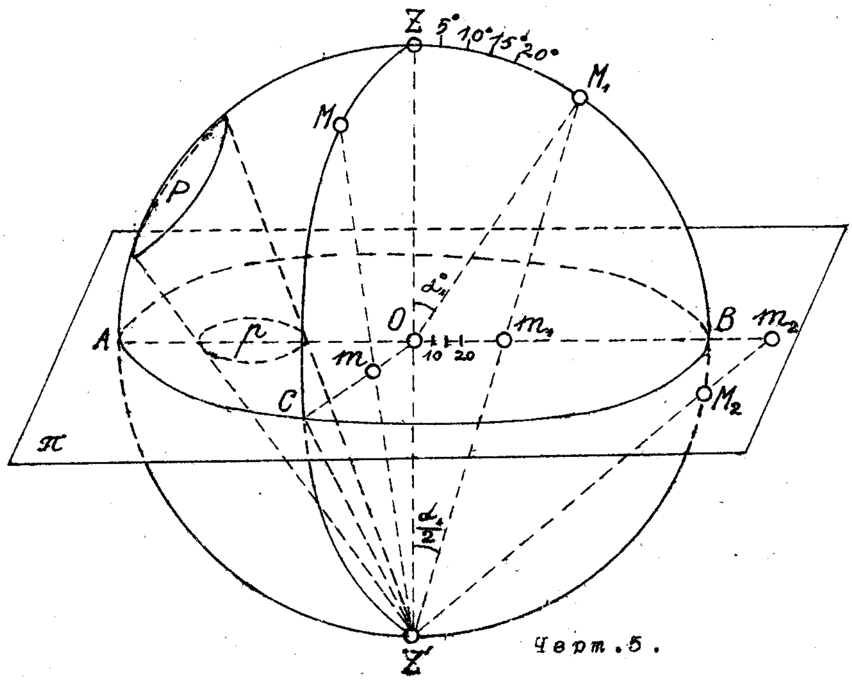
Недостатком этой проекции является значительное удаление от точки Q проекции точки по мере ее приближения к экватору (черт. 4). Проекции же точек экватора находятся на бесконечности, (так как $tg\,90^\circ = \infty$). На чертеже можно видеть только некоторую часть верхнего полушария (так как мы не можем плоскость проекции делать чрезмерно большой).

От указанного недостатка свободна стереографическая проекция, на которой всегда можно изобразить несколько более полушария. Для построения этой проекции проводят плоскость проекции через центр шара (черт.5), а точку зрения, помещают на шаровой поверхности, на диаметре ZZ' перпендикулярном к π – в точке Z'. Чтобы найти стереографическую проекцию точки M_1, лежащей на шаре, надо ее соединить лучем $Z'M_1$ с точкой зрения Z' и найти точку m_1 пересечения луча с плоскостью проекций .

Так как большой круг ABC одновременно принадлежит и шару и плоскости проекций, то все его точки проектиру ются сами в себя и его проекцией будет этот же круг. Проекцией зенита Z будет центр этого круга, называемого к р у г о м   п р о е к ц и й. Проекция всякой точки M_1, лежащей в верхнем полушарии будет точка m_1 находящаяся внутри круга проекций.

Проекция точки нижнего полушария M_2 будет лежать в н е круга проекций – m_2.

Проекция окружности большого круга, проходящего че-



Черт. 5.

рез диаметр ZZ', изобразится диаметром круга проекций. Действительно, в этом случае все проектирующие лучи, проходя всегда через ZZ' и какую либо точку круга M, будут лежать в плоскости круга ZMZ'; значит, проекции точек окружности будут лежать на прямой линии пересечения двух плоскостей: π и ZMZ' проходящей через O, а такая прямая и будет диаметром кругом проекций.

Проекция окружности малого круга P построится так: все точки круга соединим лучами с Z' эти лучи вместе образуют п р о е к т и р у ю щ и й к о н у с $Z'P$; пересечение этого конуса с плоскостью проекций даст замкнутую кривую, которая и будет проекцией окружности малого круга. В дальнейшем мы докажем, что эта кривая о к-р у ж н о с т ь. Если угол наклона луча OM_1 к линии OZ назовем через α_1, а расстояние Om_1, через y, то

$$y = R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1}{2} \quad . . . . (3)$$

По этой формуле можно по положению проекции точки m_1 относительно центра найти угол наклона искомого направления к вертикали (этот угол называют з е н и т н ы м или п о л я р н ы м р а с с т о я н и е м);

Например, если $\alpha = 90^\circ$, то

$$y = R\,\mathrm{tg}\,\frac{90^\circ}{2} = R\,\mathrm{tg}45^\circ = R\,,$$

т.е. проекция лежит на круге проекций, что мы вывели раньше из чисто геометрических соображений.

§4. Шкалы линейная и стереографическая. Применение проекций к кристаллографии.

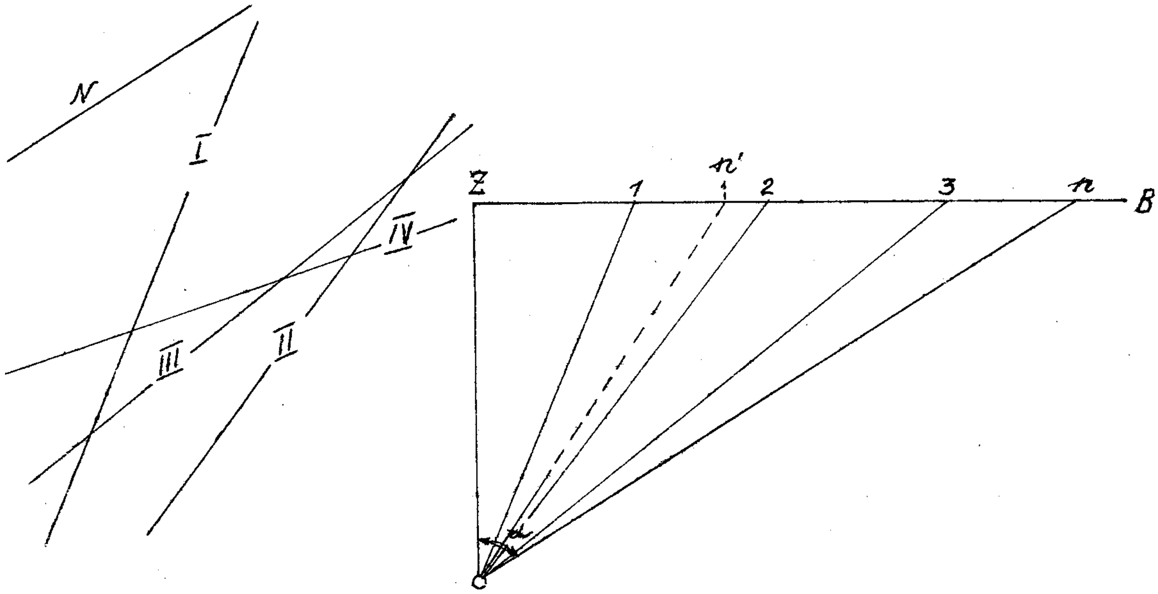
Стереографическую проекцию* впервые применил для проектирования звездного неба Гиппарх, замечательнейший астроном всех столетий (180-125 г. до Р.Х.). Но ее полезно употреблять не только в том случае, когда нужно изображать поверхность шара на плоскости, как например, в астрономии при изображении небесной сферы, и в картографии при изображении земного шара, но и в тех случаях, когда нужно изучать углы между линиями и плоскостями в пространстве, как это встречается в кристаллографии. Этот случай рассмотрим подробнее. Пусть у нас есть на плоскости разнообразно расположенные прямые линии (черт 6) и мы хотим изучить углы их наклона к вертикальной линии OZ. Примем $OZ = R = 10$ см. и проведем прямую ZB перпендикулярную к OZ; через точку O проведем лучи параллельные изучаемым, т.е. O1 параллелен I, O2 параллелен II, O3 параллелен III и т.д. Очевидно расстояния Z1, Z2, Z3 могут служить мерой наклона лучей к вертикали: эти

* Στερεως — пространство, твердое тело γραφω пишу, изображаю — т.е. значит „изображающий пространственные формы“

расстояния делаются все больше по мере увеличения угла наклона Z01, Z02, Z03 и т.д. Очевидно, что если угол наклона луча On обозначим α, то

$$Zn = R\ tg\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Следовательно, если мы проведем лучи через определен -

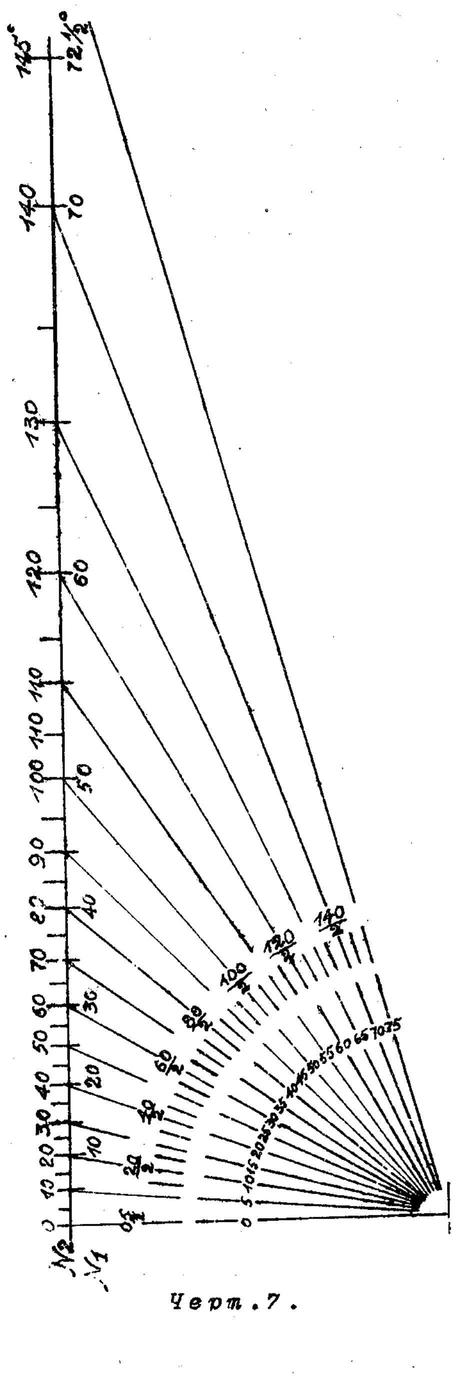


Черт.6.

ное число градусов, скажем через 5, то на линии ZB получим шкалу тангенсов, по которой можно не строя лучей, узнавать угол наклона их к вертикали по заданной точке выхода n или, что то же самое, по расстоянию Zn. На чертеже 7 изображена эта шкала для R = 5 см. через 5°. По ней мы видим, что 01 наклонено под 23°, 02 под 38°. Эта шкала доведена до $72\frac{1}{2}°$ - далее тангенсы оказываются большими и неудобными для характеристики угла. Чтобы иметь возможность характеризовать углы до 90° и несколько более, изменим построение: проведя луч On, найдем б и с с е к т р и с у угла α - On' и расстояние Zn' будем считать за меру угла ZOn = α. Очевидно что.

$$Zn' = R\ tg\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Если теперь построим шкалу через 5° (черт.7), то видим, что хотя она менее точна графически (при одном и том же радиусе R = 5 см. и угле расстояния Zn' короче, чем Zn), но удобнее, так как углы возрастают скорее: Там где для первой шкалы стоит угол в m° для второй $2m^\circ$ и ее можно при той же длине нанести до 145°, т.е. до вдвое больших углов*.



Черт.7.

Если бы заданные линии были расположены в пространстве, то мы точно также, проведем через O им параллельные и получим п у ч е к п р я м ы х; на расстоянии R от O, перпендикулярно к вертикали OZ проведем плоскость; выходы лучей дадут нам точки, которые определяют угол наклона лучей и положение их в пространстве, - это будет отвечать линейной проекции. Выходы биссектрис, тоже будут характеризовать положение лучей, и так как расстояние до биссектрис выражается $R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ т.е. формулой (3), то это будет соответствовать с т е р е о г р а ф и ч е с к о й п р о е к ц и и. Поэтому шкалу №1 назовем л и н е й н о й шкалой, а шкалу №2 с т е р е о г р а ф и ч е с-

---

*Так как, откладывая величину отрезка тангенса, мы для линейной шкалы отмечаем угол ρ, а для стереографической при той же величине тангенса 2ρ, то очевидно, можно вместо откладывания $\operatorname{tg}\rho$ по линейной шкале, отложить $\operatorname{tg}2\rho$ по стереографической

И.К.Разумовский „Проекции“

к о й. Можно построить шкалы и для $tg\frac{\alpha}{3}$, $tg\frac{\alpha}{4}$ вообще $tg\frac{\alpha}{n}$. Такие шкалы имеют применение в картографии (проекции Парана, Лаира и др.).

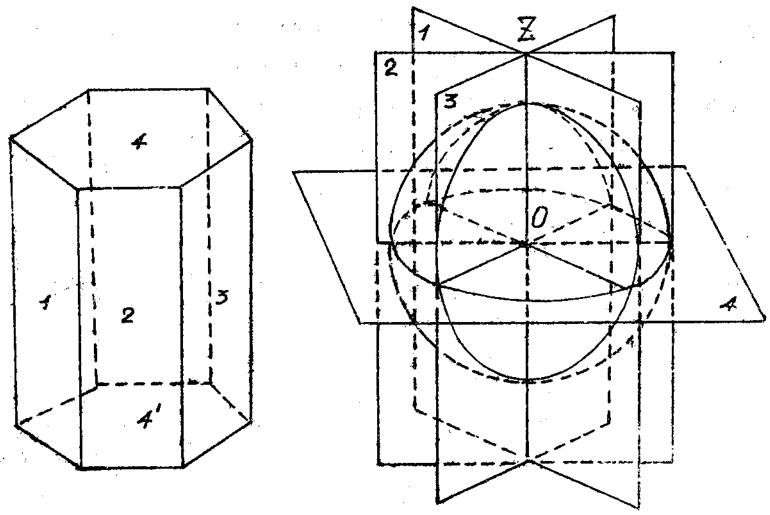
У п р а ж н е н и е. Найти - по шкалам N1 и N2 на сколько градусов наклонены лучи 02 и On' (черт.6).

При изучении кристаллов установлено, что такие свойства кристалла, как его размеры, форма граней, их относительное расстояние друг от друга - зависят от внешних условий роста: температуры, концентрации, давления и пр. и не являются характерными для вещества кристалла. Взаимный же наклон граней и ребер, наоборот, не зависит от внешних причин, а есть коренное свойство вещества. Поэтому целесообразно, изучая кристаллическое вещество, как либо отвлечься от внешних влияний, заменяя данный случайно образованный кристалл геометрической системой, однозначно построенной.

Натуральный кристалл ограничен плоскостями и линиями - гранями и ребрами. Совершенно ясно, что достаточно знать только все грани, а ребра могут быть построены как линии пересечения 2-х граней - либо знать все ребра - грани же найдутся как плоскости, проходящие через 2 ребра. Обычно ищут с и с т е м у г р а н е й, ребра же находят по мере надобности и мы в дальнейшем будем говорить о гранях.

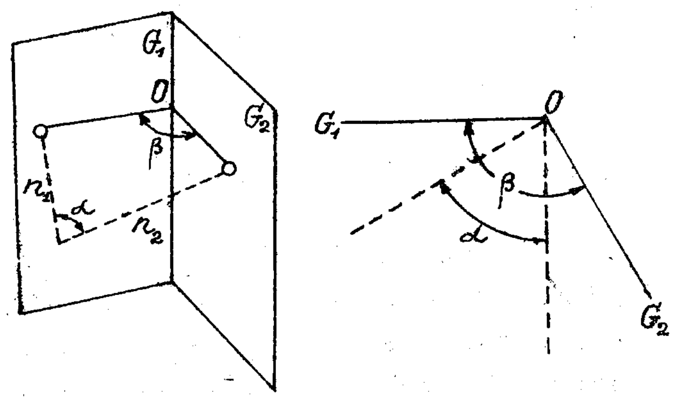
Пусть мы имеем естественный кристалл (черт.8). Через какую либо точку пространства О проведем плоскости, параллельные граням кристалла. Получим систему плоскостей, взаимный наклон которых тот же, что и граней в кристалле. Такую систему плоскостей мы будем называть г р а н е в ы м к р и с т а л л и ч е с к и м п у ч к о м или короче г р а н е в ы м п у ч к о м. В пучке расстояния между гранями и величина граней исчезли, а сохранилось лишь взаимные наклоны, т.е. именно то что существенно для характеристики кристаллического вещества.

Важно отчетливо уяснить себе следующее обстоятельство. если мы знаем плоскость 4, проходящую через точку O (черт.8), то мы всегда можем в точке O восстановить нормаль (перпендикуляр) к плоскости 4 и узнать положение этой нормали в пространстве. Положение нормали, обратно, вполне охарактеризует нам положение плоскости. Поэтому мы можем вместо пучка плоскостей, вообразить пучек нормалей к граням* восстановленных в центре пучка O, который нам точно также охарактеризует



Черт.8.

кристалл; разница будет только та (см.черт.9), что угол между двумя нормалями $\widehat{n_1 n_2}$ равен дополнительному до 180° к двугранному углу $\widehat{G_1 G_2}$ так как $\alpha + \beta = 180^\circ$ как



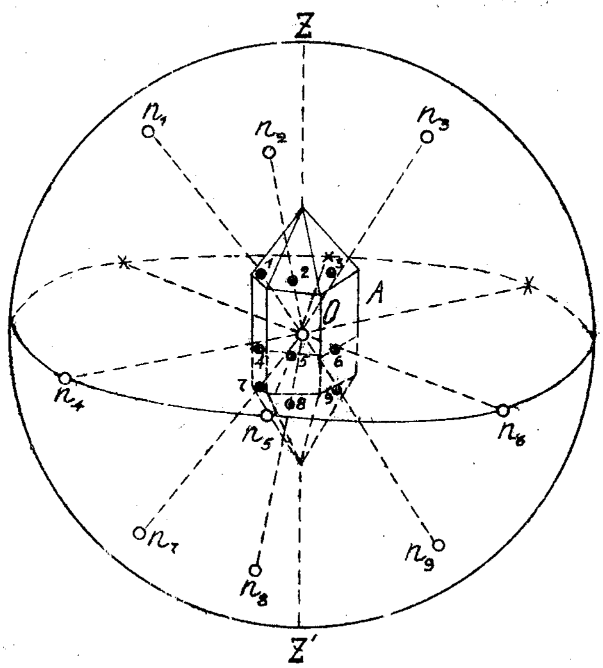
Черт.9.

углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Такой пучек нормалей к граням мы назовем нормалевым кристаллическим пучком, или короче нормалевым пучком.

**т.е ,очевидно произвести гномокорреляцию.*

Если из центра пучка О описать шар (радиус этого шара обычно принимают 10 см), то плоскости пучка пересекут этот шар по большим кругам, а линии в двух диаметрально противоположных точках. Тогда граневый пучек изобразится системой дуг, а нормалевый пучек системой точек. Последнее удобнее, почему нормалевый пучек употребляется чаще.

На черт.10 изображен способ построения на сфере нормалевого пучка. А - натуральный кристалл; 1,2,... нормали к его граням, опущенные из центра сферы, расположенной где нибудь внутри кристалла. n_1, n_2 выходы нормалей на сфере, которые являются проекциями граней. Имея сферокорреляцию пучка, мы не сможем обратно восстановить кристалл в виде геометрического тела. Но если в точках выхода нормалей на сфере провести до взаимного пересечения касательные плоскости, то получим геометрическое тело, которое называют и д е а л ь н ы м к р и с т а л л о м и к построению которого иногда прибегают для наглядности.



Черт.10.

Таким образом, нам понятно теперь каким образом система граней кристалла может быть сведена к кристаллическому пучку, а последний заменен сферой с закономерно на ней расположенными точками, заменяющими по своему положению определенно ориентированные грани кристалла.

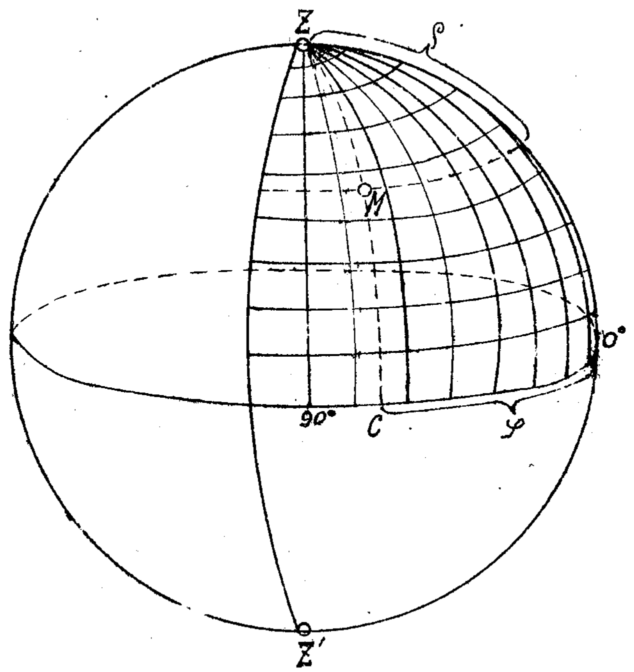
Так преобразованный пучек (т.е. в сущности говоря сфера с закономерно на ней расположенными точками и окружностями) может быть с удобством изображена на плоскости при помощи стереографических проекций.

ГЛАВА II. ТЕОРИЯ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ.

§1. Полярная система координат.

Для фиксирования точек, лежащих на шаровой поверхности, как в астрономии и картографии так и в учении о проекциях, употребляется полярная система координат.

Как либо выбранную точку шаровой поверхности Z (черт.11) принимаем за основной полюс, от которого по дуге большого круга отсчитываем (в градусах) полярное расстояние ρ * до данной точки M; это будет первая координата. Все точки с постоянным ρ будут лежать на окружности малого круга с центром в Z называемой параллелью.



черт.11.

Большие круги, проходящие через полюс Z, называются меридианами. Один из них, например, ZCZ' примем за нулевой; за вторую координату точки примем двугранный угол φ**, составлен -

* *Эта буква произносится „ро".*

** *Эта буква произносится „фи".*

ный плоскостью меридиана, проходящего через точку M, с плоскостью начального меридиана. Очевидно, этот угол может быть измерен также дугою OC э к в а т о р а (большого круга, перпендикулярного к оси ZZ'). Условимся долготу отсчитывать по часовой стрелке. Очевидно, ρ может изменяться от 0° до 180° (при 90° переходя через экватор), а φ - от 0° до 360°.

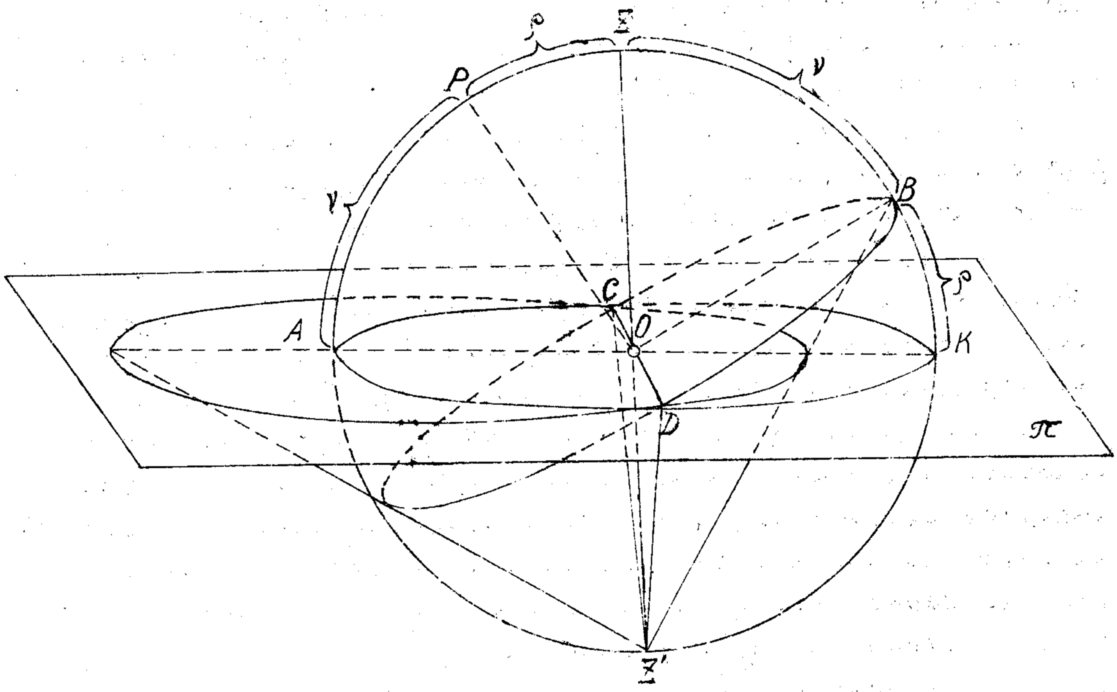
При помощи этих двух координат - долготы φ и полярного расстояния ρ положение точки на сфере определяется вполне однозначно. Мы будем при записи координат неизменно держаться такого порядка записи: писать название точки на шаре (заглавной буквой латинского алфавита) и в скобках сначала долготу, а потом полярное расстояние. Например, запись $B(217^\circ, 33^\circ)$ будет значить, что точка B на шаре имеет координаты $\varphi = 217^\circ$ и $\rho = 33^\circ$.

Иногда вместо полярного расстояния удобно употреблять угол наклона не к полюсу, а к экватору, т.е. то что в астрономии называется широтой. Мы этот угол будем обозначать греческой буквой "ни" - ν. В тех случаях когда у нас точка задана долготой и широтой, мы координаты будем писать в квадратных скобках. Например, $C[217^\circ, 57^\circ]$ означает, что $\varphi = 217^\circ$, а $\nu = 57^\circ$. Очевидно, всегда имеется равенство для одной и той же точки:

$$\rho + \nu = 90^\circ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Если мы имеем на шаре (черт.12) дугу большого круга CBD, то сделав гномокорреляцию, всегда найдем точку P выход нормали к плоскости дуги CBD. Эта точка будет называться п о л ю с о м д у г и CBD (не путать с полюсом координат Z!). Угол в плоскости меридиана, проходящего через P, от Z до дуги, т.е. угол $ZOB = \nu$ - и называется с к л о н е н и е м дуги. Из чертежа непосредственно видно, что широта полюса равна склонению нормальной к полюсу дуги $= \nu$; широта же дуги $=$ полярному расстоянию полюса $P = \rho$.

Если на шаре через равное число градусов /2°, 5° или 10°) проведем все параллели и меридианы, то весь шар разобьется на сферические четыреугольники и треугольники, и мы получим т.н. градусную сеть определенного интервала (2°, 5° и 10°), значительно облегчающую построение точек на шаре (на черт.11 градусная



Черт.12.

сеть проведена через 10° для 1/8 шара).

§2. Основные свойства стереографических проекций.

Следующие три свойства стереографических проекций особенно важны, так как позволяют очень просто изучать на чертеже взаимные наклоны лучей в пространстве (при помощи промежуточного их преобразования на сферу).

I. Внутри круга может быть изображена вся верхняя полусфера.

II. Углы между дугами больших кругов на шаре равны углам между дугами их проекций (как и везде в математике, под углом между двумя пересекающимися дугами подразумеваем угол между касательными к этим дугам из общей точки пересечения)(черт.4).

III. Окружности дуг как малых, так и больших кругов, изобразятся в проекции кругами же или же в частном случае, прямыми линиями (последние для общности можно считать кругами бесконечно большого радиуса).

Первое свойство было уяснено раньше, к доказательству II и III мы и перейдем.*

Т е о р е м а II: Стереографическая проекция а в т о г о н а л ь н а, т.е. угол между проекциями сферических линий равен углу между самими линиями на сфере.

Прямая, касательная к линии, лежащей на сфере, касательна к самой сфере. Поэтому, а также учитывая свойство всех центральных проекций, доказанное на стр. 11, достаточно показать, что угол α_0 (черт.13) между двумя прямыми A_0B и A_0D, касающимися сферы в точке A_0, равен стереографической проекции α этого угла. Проведем плоскость Q, касающуюся сферы в точке зрения S и, следовательно, параллельную плоскости проекций. Продолжаем стороны данного угла до пересечения с плоскостями π и Q в точках B, D, B_0 и D_0. Угол BAD представляет очевидно проекцию угла BA_0D, т.к. A есть проекция A_0, а B и D, как точки, лежащие на плоскости проекций, сами суть свои проекции. SD_0 параллельна AD и SB_0 параллельна AB, как линии пересечения параллельных плоскостей π и Q плоскостями SA_0B_0 и SA_0D_0, следовательно угол $\angle B_0SD_0 = BAD = \alpha$, как углы с соответственно параллельными сторонами.

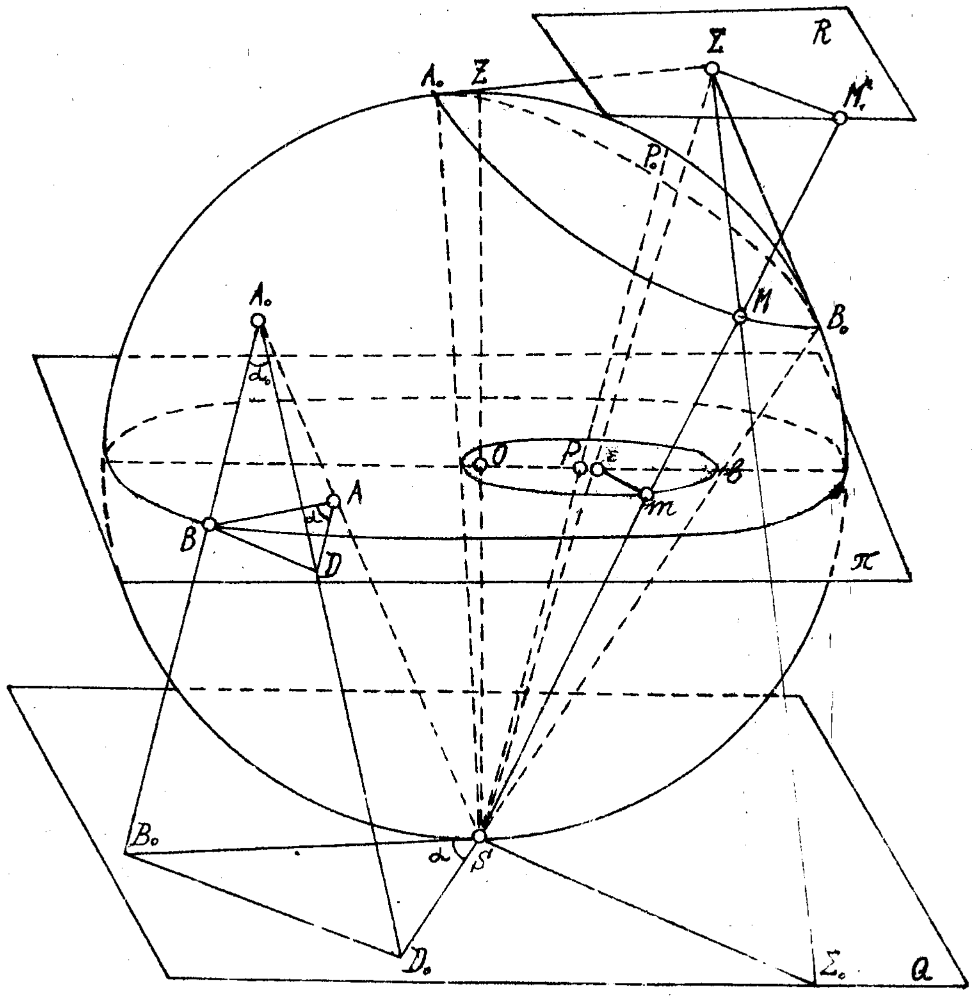
$B_0A_0 = B_0S$ и $D_0A_0 = D_0S$, как касательные к сфере, про-

---

*Гиппарх, первый применивший стереографическую проекцию, видимо не знал еще свойств II и III. Заимствовавший эту проекцию у Гиппарха Птоломей [87-165 гг. по Р.Х.] знал свойство III для частных случаев, II ему было неизвестно вовсе. Только в средние века впервые встречается ясное понимание III свойства [Iordanus, начало 13 века] и точное его доказательство [Clavius, 1593]. Открытие и первое доказательство II свойства сделали Hook, аббат de Moivre и Halley [1695-1697]. [по Болдыреву см. A. Hutchinson, Z.f.Kr. 46. 340-342].

веденные из одной точки, $D_0B_0 = D_0B_0$ следовательно
$\Delta\ B_0A_0D_0 = \Delta\ B_0SD_0$ и $\angle B_0A_0D_0 = \angle B_0SD_0 = \angle BAD$, т.е. $\alpha = \alpha_0$,
что и требовалось доказать.

Выведенное сейчас свойство стереографических проекций, присущее и некоторым другим проекциям, есть необходимое и достаточное условие того, что данная проекция конформна, т.е., что сферические фигу-



Черт. 13

ры, имеющие по всем направлениям бесконечно малые размеры, проектируются подобными им бесконечно малыми фигурами.

Т е о р е м а III. Проекция окружности есть окружность. Докажем это свойство сначала для малых кругов (черт.13). Пусть нам дана окружность малого круга A_0MB_0. Опишем вокруг сферы конус, касающийся сферы по данной окружности A_0MB_0 и построим проекцию ε его вершины Σ. Через Σ и через точку зрения S проводим плоскости R и Q параллельно плоскости проекций π. Возьмем произвольную точку M на данной окружности и найдем ее проекцию m. Докажем, что длина εm не зависит от положения точки M на окружности. Продолжим образующую ΣM конуса до пересечения с плоскостью Q в точке Σ_0 и прямую SM до пересечения с R в точке M_1. Плоскость $S\Sigma M$ пересекает три параллельные плоскости R, π и Q по параллельным прямым $\Sigma M_1 \parallel \varepsilon m \parallel S\Sigma_0$ поэтому

1) $\Delta M_1\Sigma S \sim \Delta m\varepsilon S$ и следовательно:

$$\frac{\varepsilon m}{\Sigma M} = \frac{S\varepsilon}{S\Sigma} \quad \text{откуда} \quad \varepsilon m = \Sigma M_1 \cdot \frac{S\varepsilon}{S\Sigma} \; . \; . \; . \; . (5)$$

2) $\Delta M_1\Sigma M \sim \Delta S\Sigma_0 M$ и следовательно:

$$\frac{\Sigma M_1}{\Sigma_0 S} = \frac{\Sigma M}{\Sigma_0 M} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

но в пропорции (6) знаменатели равны, как касательные к сфере из одной точки Σ_0 - $\Sigma_0 S = \Sigma_0 M$; следовательно, равны и числители: $\Sigma M_1 = \Sigma M$; подставляем в (5).

$$\varepsilon m = \Sigma M \cdot \frac{S\varepsilon}{S\Sigma} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

ΣM, как образующая конуса, величина постоянная, от положения точки M не зависящая. $S\varepsilon$ и $S\Sigma$ также величины не связанные с положением M. Следовательно $\varepsilon m = \mathrm{const}$ и значит внутри замкнутой кривой amb есть точка ε, от которой все точки кривой находятся на равном расстоянии. Отсюда и заключаем, что кривая amb окружность*.

**Доказательства свойств II и III мною заимствованы из курса В.В.Каврайского „Стереографические проекции", которым я пользовался в рукописи с любезного разрешения автора. Эти доказательства принадлежат T.Tisserant et H.Andoyer (см. Leçons de Cosmographie, Paris, 95 pp 69-71) есть русский перевод: Ф.Тиссеран и Андуайе – Космография, СПБ., 1908 г.*

С л е д с т в и е . Из чертежа 12 видно, что проекция p полюса P_0 малого круга A_0B_0M и геометрический центр проекции (точка ε) не совпадают; они лежат на одном диаметре ab, представляющем линию пересечения плоскости проекции и плоскости меридиана, проходящего через P_0; лишь для кругов, параллельных плоскости проекции, p и ε, очевидно сливаются между собой и с центром проекции O.

Это доказательство неприменимо, если данный круг большой, так как тогда Σ лежит в бесконечности; Но так как всякий большой круг мы можем рассматривать, как частный случай положения малого круга, то очевидно, что теорема относится и к нему. В самом деле, если мы параллельно большому кругу проведем на небольшом от него расстоянии малый круг, то для него теорема по доказанному справедлива. Будем сближать круги, оставляя параллельными. Тогда малый круг будет приближаться к большому и их проекции тоже будут сближаться, и в пределе совпадут. Точки проекции малого круга, представляющей окружность, будут неограниченно приближаться к соседним точкам проекции большого круга, что, очевидно, возможно лишь тогда, если эта последняя тоже окружность. Всякий большой круг проходит через центр шара и очевидно, пересекает плоскость проекции по диаметру круга проекций концы которого проектируются сами в себя. Отсюда.

Т е о р е м а IV. проекция окружности большого круга пересекает круг проекций по диаметру CD последнего (черт.12). Этот диаметр круга проекций для проекции окружности является х о р д о й разделяющей проекцию на часть внутреннюю и внешнюю по отношению к кругу проекций.

В кристаллографии стереографическую проекцию впервые предложил Бернгарди в 1304 году*, затем Нейман (в 1823 г.) и окончательно введена Миллером (в 1835 г.) ; линейная и гномоническая (т.е. линейная проекция норма-

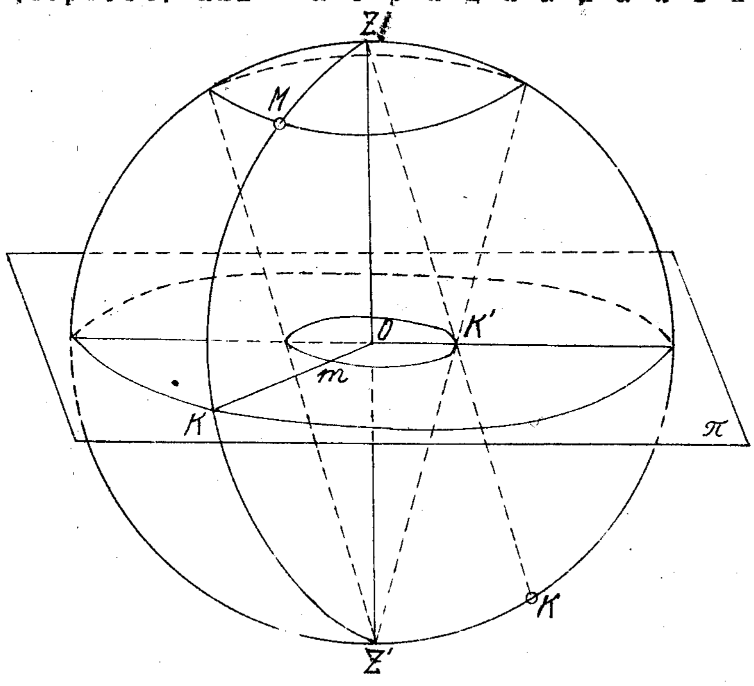
---

*Д.И.Вернадский. Основы кристаллографии. 1903 г. стр. 335.

левого пучка) введены Квенштедтом в 1834 г.и подробно изучены и применены на большом материале в особенности Гальдшмидтом (1887 г)*.

§3. Стереографические сетки.

Стереографической сеткой называется стереографическая проекция градусной сети шара. Сетка может быть п о л я р н о й, когда плоскость проекции совмещена с экватором, а точка зрения с надиром (т.е. нижним полюсом) (черт.14) или м е р и д и а н а л ь н о й - когда точка зрения где нибудь на экваторе, и плоскостью проекций будет меридиан, отстоящий от точки экватора на 90°, в этом случае ось лежит в плоскости чертежа. (черт.15). У полярной сетки (черт. 14 и таб. VI) градусы долготы (на экваторе) получатся на чертеже без искажения, меридианы изобразятся прямыми линиями, пересекающимися в центре, (например, меридиан ZMZ' прямой OmK), а параллели - концентрическими центральными кругами. Так как параллели проведены через 5°, 10°, 15° и т.д. от полюса Z (или 2°, 4°, 8° .... если интервал равен 2°), то рас-

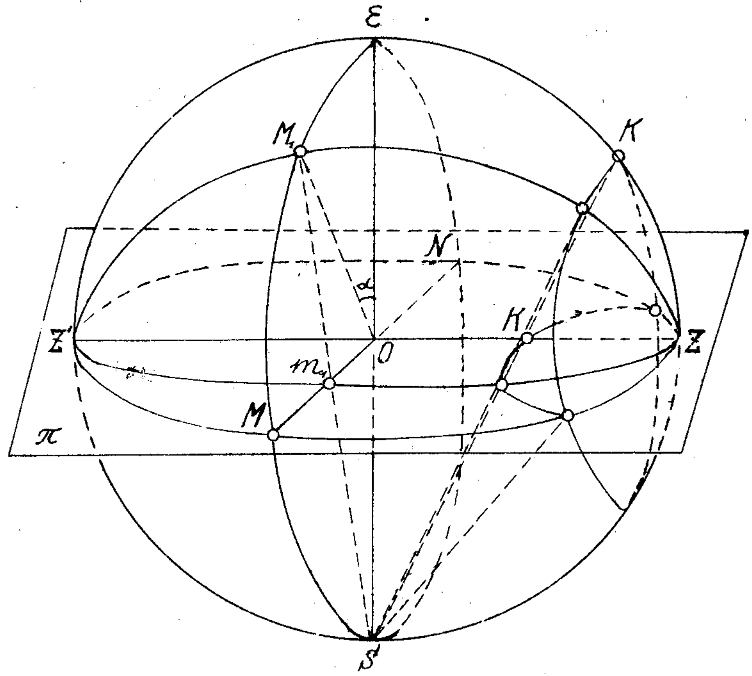


Черт. 14.

---

* V. Goldschmidt - Ueber Projection und graphysche Krystallberechnung - 1887.

стояния проекций их до центра будет $R.tg\frac{5^\circ}{2}$, $R.tg\frac{10^\circ}{2}$; $R.tg\frac{15^\circ}{2}$; т.е. могут быть построены по с т е р е о - г р а ф и ч е с к о й ш к а л е. Если последней нет под руками, то ее можно найти графически: (черт5). Начертить профиль шара $R = 10$ см по какому либо меридиану; отложить от Z по транспортиру 5° 10°, 15° и т.д. и соединить эти точки с Z, тогда на радиусе OB построится требуемая шкала. Таким образом построить полярную сетку просто: Нужно начертить окружность радиусом 10 см. и при помощи транспортира разделить ее на градусы. Через 5° проводим диаметры круга; один из них делим стереографически на интервалы в 5° и проводим параллели. В продаже имеется такая сетка для шара с $R = 10$ см для интервала сети в 5° и 2° (сетка Белянкина; таб. VI). Все построения делаются на самой сетке, которая служит как бы градусной канвой ("сетка-канва" по меткому выражению С.М.Романова).



Черт.15.

При построении меридианальной сетки, как сказано, плоскость чертежа (черт.15) совмещена с меридианом, а точка зрения лежит на экваторе в точке S. Экватор εMS и меридиан $Z\varepsilon Z'$ изобразятся двумя взаимно-перпендикулярными диаметрами MN и ZZ' круга проекции, при чем проекция меридиана совпадает с полярной осью шара ZZ'. Все другие меридианы изобразятся окружностями, проходящими через полюсы Z и Z' и пересекающими экватор. Если данный меридиан ZM_1Z' отстоит по дуге экватора от точки ε на $\alpha°$ *, то проекция m_1 точки пересечения меридиана с экватором M будет отстоять от O на расстояние

$$Om_1 = R.tg\frac{\alpha}{2}$$

следовательно точка m_1 расположится там где на стереографической шкале будет расположено $\alpha°$. Таким образом, для каждого меридиана мы знаем три точки, по которым можно всегда построить окружность. два полюса Z и Z' и точку m_1. Параллель с координатой, скажем. $\varphi = 15° = ZK$ отстоит от полюса по всем меридианам на это число градусов; поэтому от полюса Z можно отложить по кругу проекций в обе стороны по $15°$ и по прямой OZ по стереографической шкале от точки Z - $ZK = 15°$, тогда будем знать три точки параллели. Следовательно и меридианы и параллели можно построить по трем точкам, для чего, соединив их попарно хордами, нужно восстановить перпендикуляры в их середине; пересечение последних определит, как известно, геометрический центр искомой окружности.

Однако, для меридианов и параллелей можно найти положение геометрического центра и аналитически. Если имеем, что меридиан ZmZ' (черт.16) отстоит от O на $\gamma°$, то $Om = R.tg\frac{\gamma}{2}$; расстояние же от O до точки g равно в градусах $180 - \gamma$ (так как на шаре дуга от m до g равна $180°$), отсюда:

$$Og = R\ tg\frac{(180 - \gamma)}{2} = R.Cot\frac{\gamma}{2}$$

Поэтому диаметр круга .

$$gm = R.Tg\frac{\gamma}{2} + R.Ctg\frac{\gamma}{2} =$$

$$= R\frac{Sin\,\gamma/2}{Cos\,\gamma/2} + R\frac{Cos\,\gamma/2}{Sin\,\gamma/2} = R\frac{Sin^2\gamma/2 + Cos^2\gamma/2}{Sin\,\gamma/2 . Cos\,\gamma/2} = \frac{2R}{Sin\,\gamma};$$

---

* т.е. склонение его $\nu = \alpha°$.

радиус же этого круга

$$m = \frac{1}{2} gm = \frac{R}{\operatorname{Sin}\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

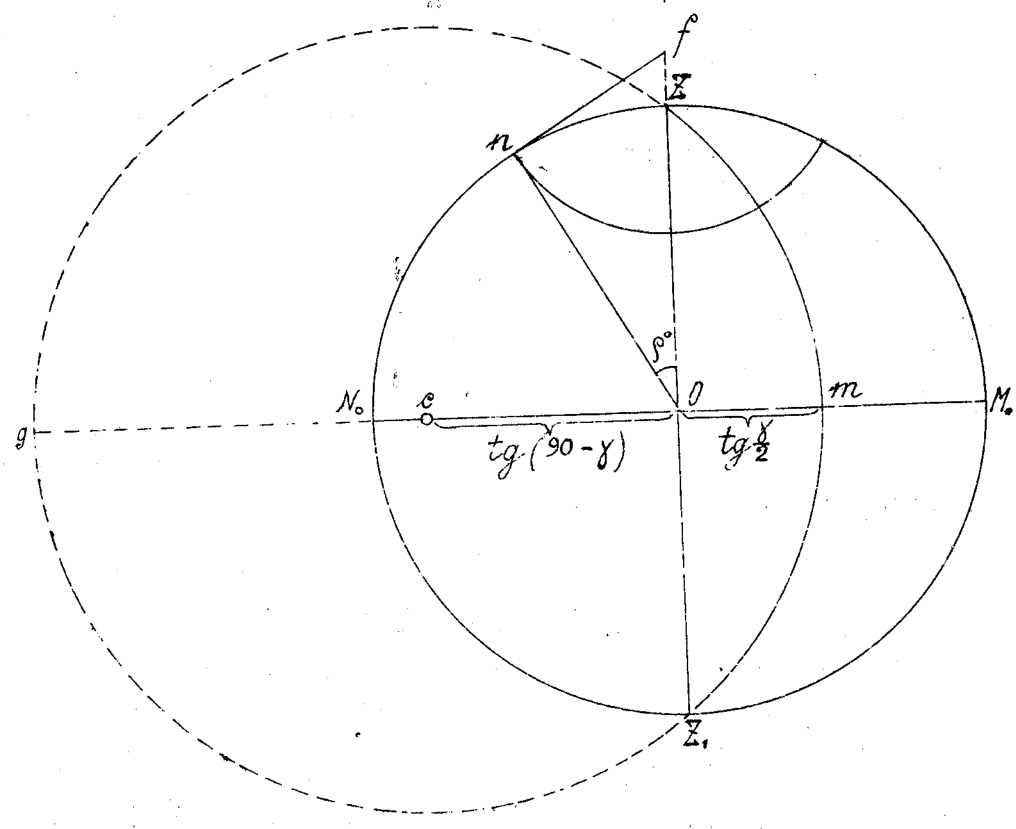
Расстояние искомой точки С от центра сетки О найдем так:

$$cO = cm - Om = \frac{R}{\operatorname{Sin}\gamma} - Rtg\frac{\gamma}{2} = \frac{R}{2\operatorname{Sin}\gamma/_2 \cdot \operatorname{Cos}\gamma/_2} - R \cdot \frac{\operatorname{Sin}\gamma/_2}{\operatorname{Cos}\gamma/_2} =$$

$$= R\frac{1 - 2\operatorname{Sin}^2\gamma/_2}{2\operatorname{Sin}\gamma/_2 \cdot \operatorname{Cos}\gamma/_2} = \frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Sin}\gamma} \cdot R =$$

$$= R \cdot \operatorname{Cot}\gamma = R \cdot tg(90^\circ - \gamma) \quad \ldots\ldots \quad (9)^*$$

О т с ю д а п р а в и л о: чтобы найти центр проекции меридиана, склонение которого γ°, нужно найти ши-



Черт.16.

роту меридиана $\vartheta = 90^\circ - \gamma$ и по л и н е й н о й шкале по линии экватора отложить в обратную сторону от центра $tg\,\vartheta$. Далее останется только поставить в полу-

---

* *Вывод по С.М.Романову, с некоторыми упрощениями.*

ченную точку С острие циркуля, раздвинуть карандаш до m (или до одного из полюсов Z или Z') и прочертить дугу*.

Для параллели в φ° имеем: дуга $Zn = \varphi^\circ$, а радиус On перпендикулярен к fn. Отсюда имеем:

$$fn = R . Tg\,\varphi^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\text{а} \quad Of = \frac{R}{Cos\,\varphi^\circ} = R . Sec\,\varphi^\circ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Для нахождения точки f лучше всего, найдя точку n, отложить взятое циркулем по линейной шкале расстояние $tg\,\varphi^\circ$ и получить засечкой на продолжении линии OZ точку f.

Так построенная сетка через 2° для шара R = 10 см. введена в кристаллографии Г.В.Вульфом (см.таб.I) и носит его имя. Сетка Вульфа употребляется, как транспорант а чертеж делается на просвечивающей бумаге (пергаменте, восковке или кальке).

Первая стереографическая сетка была предложена Метиусом в 1624 г.** В кристаллографии как меридиональная так и полярная сетки были введены Е.С.Федоровым в 1892 г.*** Этот ученый оченъ много сделал для разработки как теории стереографической проекции, так и для проектирования вообще..

Сетка Ю.В.Вульфа изобретена в 1897 г. а впервые опубликована им в 1902 г.****

---

*Очевидно, этот же прием мы должны применить, если хотим найти центр проекции любого большого круга.

**Hutschinson Z.f.Kr.46.239.

*** Auflösung einiger Aufgaben der Stereographischen Projection Z.f.Kr.20.359.

****Г.В.Вульф – о способах начертания и вычисления кристаллов применительно к теодолитному измерению. Изв. Варш. Универс. 1902. с. I–39, также Z.f.Kr.36 стр. I4.

ГЛАВА III.РАБОТА НА СЕТКЕ ПРОФ.Г.В.ВУЛЬФА.

§1.Техника черчения.Основные задачи.

При работе на сетке Вульфа обходятся без циркуля и линейки.Нужен лишь остро отточенный твердый (№3) карандаш.Сетку кладут на ровную поверхность,так,чтобы экватор занял горизонтальное (слева на право) положение.На сетку помещают кусок прозрачной бумаги,на который ставят острием карандаша точку в центре круга проекций. Для того,чтобы эту точку можно было сразу находить,отмечают ее четырьмя черточками в виде креста, н е д о в о д я и х д о ц е н т р а —¦— . Далее отмечают небольшой черточкой вне круга проекций правый конец экватора,принимаемый за начальный.Первая отметка служит для центрировки чертежа;вторая для приведения его к начальному положению.Градусы на сетке откладываются на глаз с точностью до одного градуса.При аккуратной работе точность можно довести до $\frac{1}{2}^{\circ}$.Когда построение выполнено,от руки наводят основной круг проекций*.

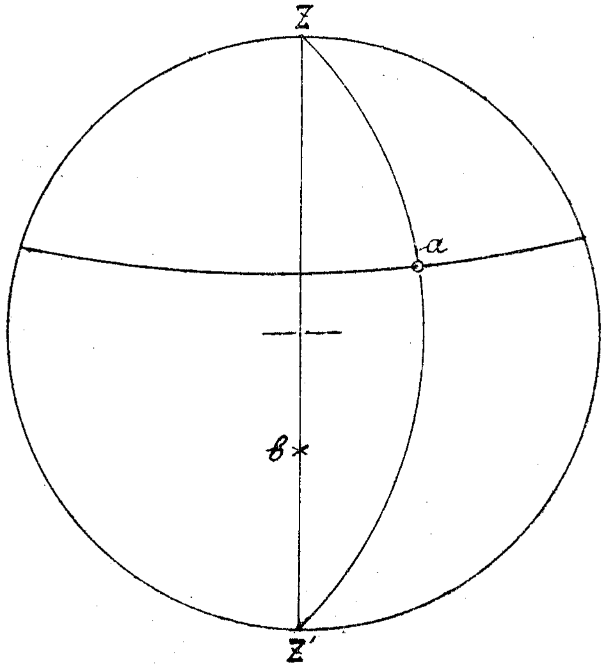
З а д а ч а I. Построить точки,координаты коих даны.Прежде всего необходимо условиться,где мы поместим полюс координат.Его можно разместить двояко:

1)Полюс совпадает с Z - точкой на круге проекций. (черт.17).Координатная сеть лежит боком ,совпадая с сетью,изображенной на сетке.За первый меридиан принимаем тот, который совпадает с плоскостью чертежа.Чтобы построить точку A (45°,70°) - (первая цифра - долгота, вторая - полярное расстояние) - находим справа по часо-

---

**В приборах Джогансона-Николаева сетка Вульфа наклеена на дерево,и на стальной оси вращается целлулоидная матовая пластинка.Этот прибор избавляет от центрировки, но не позволяет прибегать к сдвигу чертежа,что нужно напр.для задачи 9.*

вой стрелке 45-ый меридиан (на глаз между 44 и 46), и по нему от полюса Z сверху вниз отсчитываем 70°. Получим точку α. Очевидно, при таком изображении, все точки с долготой φ от 0 до 180° будут лежать в ы ш е плоскости чертежа (их будем обводить кружочками) а точки с долготой от 180° до 360°, которые будем откладывать от левого края экватора слева направо, мы должны считать н и ж е плоскости чертежа, их будем изображать



Черт.17.

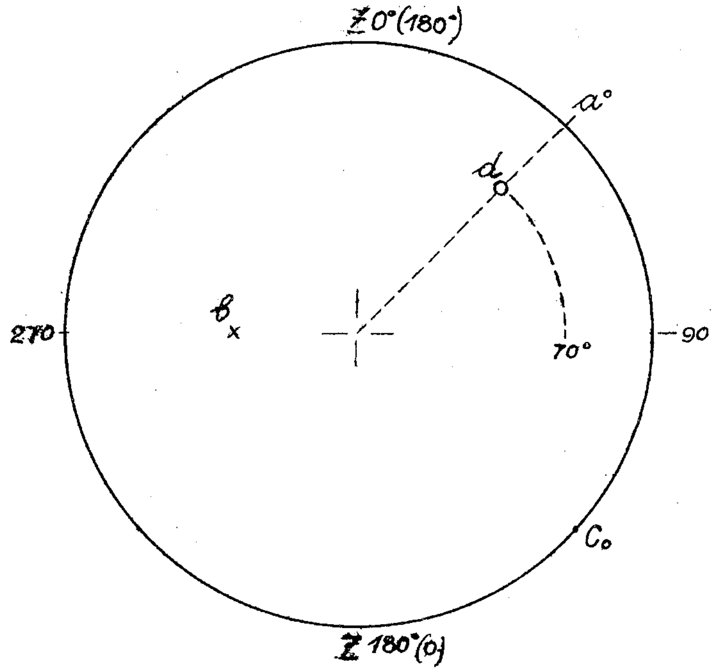
крестиками. На том же чертеже 17 - b есть проекция точки B (270°, 135°).

2). Полагаем, что проекция полюса координат совпадает с центром сетки. Сама сеть координат не изображена на сетке; сетка же представляет проекцию вспомогатель - ной сети меридианов и параллелей, изображенных в стереографических проекциях (черт.18 и таб.II).

Мы будем всегда предполагать, что на чертеже вверху стоит 0, т.е. нулевой меридиан расположен от центра вверх а от центра вниз - меридиан 180°. У правого конца экватора, где нами намечен индекс, нужно поставить 90°, так как углы мы отсчитываем по часовой стрелке. Поэтому у индекса всегда пишем 90°.

Чтобы отложить точку A (45°, 70°) (черт.18) поступаем так: от верхнего полюса откладываем по наружному кругу по часовой стрелке λ = 45°, и отмечам точку α_0. Вращая восковку, приводим полученную точку в совпадение с отметкой 90°, при этом воображаемый 45-ый меридиан совместится с экватором, на котором нанесена стереографическая шкала. По этой шкале откладываем ρ = 70° и получаем точку а, которую обводим кружком. Очевидно все точки у которых ρ = 90° находятся при таком представлении выше плоскости чертежа. Если 90° ≤ ρ ≤ 180, то точки ниже чертежа и их будем обозначать крестиком. Например, В (270°, 135°) найдется в b (число градусов ρ - 90° отсчитывается от окружности проекции к центру).

Для того, чтобы получить на чертеже проекцию, нам пришлось сделать два вращения восковки: 1) привести восковку в начальное положение и наметить точку a_0 на окружности; 2) совместить a_0 с точкой "90°" и отложить ρ°. Можно однако, рекомендовать такой прием, при котором требуется только одно вращение восковки. Для уяснения этого приема зададимся таким вопросом: у нас на восковой бумаге есть индекс, который в основном положении занимает деление 90°. На каком делении стоит этот индекс тогда, когда a_0 совмещено с 90°? Например, когда мы хотим отложить точку с первой координатой 0° - то индекс будет в нижнем полюсе; когда долгота 90° - и индекс стоит на 90°; когда долгота 180° - индекс в верхнем полюсе; когда долгота 270° - индекс в ней же. Отсюда следует такое правило. На сетке



Черт. 18.

надо поменять местами 0 и 180° - 0 поместить внизу, а 180° наверху (следовательно деления пойдут п р о т ив ч а с о в о й с т р е л к и и этим смущаться не следует, так как на чертеже они пойдут правильно, по часовой стрелке). Желая найти точку А (45°, 70°) ставим индекс на 45° (т.е. в точку C_0) и по диаметру Oa_0 отложим 70°, как и раньше. Точка придется в том же месте, как и по ранее описанному приему.

У п р а ж н е н и е. (таб. II). Отложить точки А(45°, 70°) A_1(60°, 70°), A_2(75° 70°), A_3(90°, 70°), A_4(105°, 70°), A_5(135°, 70°), A_6(200°, 70°), A_7(300°, 70°)

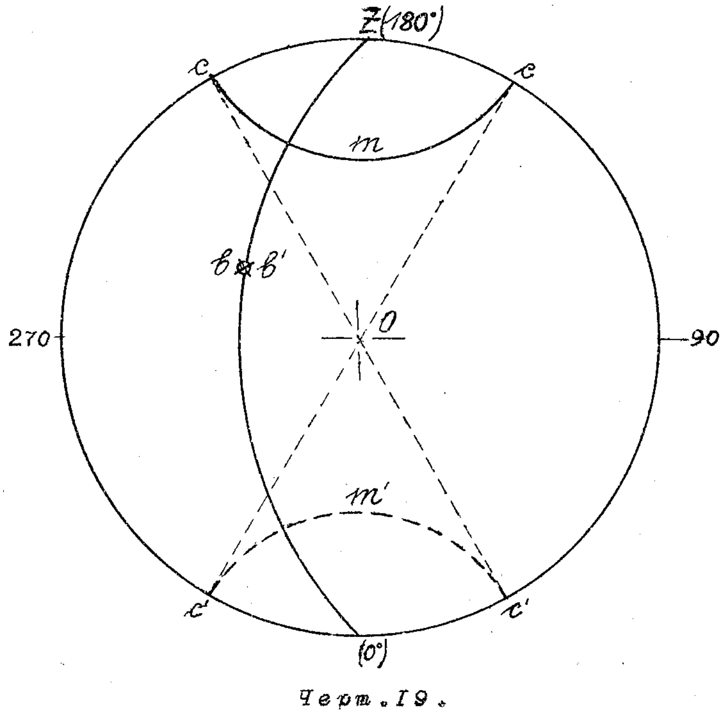
В дальнейшем мы будем всегда считать, что у нас координатная сеть спроектирована ц е н т р а л ь н о, т.е. полюс в центре сетки, а круг проекций изображает экватор сети координат. То, что меридианов этой сети не проведено, только упрощает чертеж, так как э к в а т о р с е т к и (т.е. прямую 270-90) мы можем счесть также за проекцию любого меридиана - и именно того, долгота которого отсчитывается при данном положении индекса на восковке. Прием отсчитывания также будем применять однообразный и именно тот, который требует только одного вращения. Повторю его вкратце: На сетке пишем: внизу 0°, справа у экватора 90°, вверху у полюса - 180°, влево у экватора - 270°. У индекса на восковке пишем 90°. Для отложения точки A_6(200°, 70°) приводим индекс к отсчету 200°, на сетке (т.е. в левом нижнем квадранте сетки, на 20° влево от нижнего полюса), тщательно центрируем восковку и от центра по экватору сетки вправо (т.е. к 90°) откладываем 70°, обводим точку a_6 кружочком. Если, обратно, нам надо прочесть координаты точки A_1, то помещаем точку a_1 на радиус 0 - 90°, отсчитываем ρ = 70°, а индекс в этом положении даст φ = 60° (т.е. в правом нижнем квадранте, на 60° вправо от нижнего полюса).

Относительно изображения точек нижней полусферы, (когда $\rho > 90°$) надо сказать несколько слов. Проекции таких точек как известно (см. стр. 14), будут получаться вне круга проекций. Если мы хотим иметь более полушария в одной проекции, то это неизбежно; но если нам нужно лишь наглядное представление о расположении точек на всем шаре, то можно изображение нижней полусферы совместить на том же чертеже. Совмещения достигают двумя приемами:

П р и е м п р о ф. А. К. Б о л д ы р е в а. Для каждой точки нижней полусферы найдем ей диаметрально противоположную, находящуюся в верхней полусфере; ее проектируем обычным способом.

П р и е м п р о ф. Г. В. В у л ь ф а. Для проектирования точек нижней полусферы точку зрения перемещаем в верхний полюс Z и проектируем нижнюю полусферу глядя сверху (черт. 14, точка K). Посмотрим, как при этих двух допущениях изобразятся 1) полный меридиан, 2) две диаметрально противоположные точки B и B$'$, лежащие на этом меридиане и 3) полная параллель вспомогательной сети.

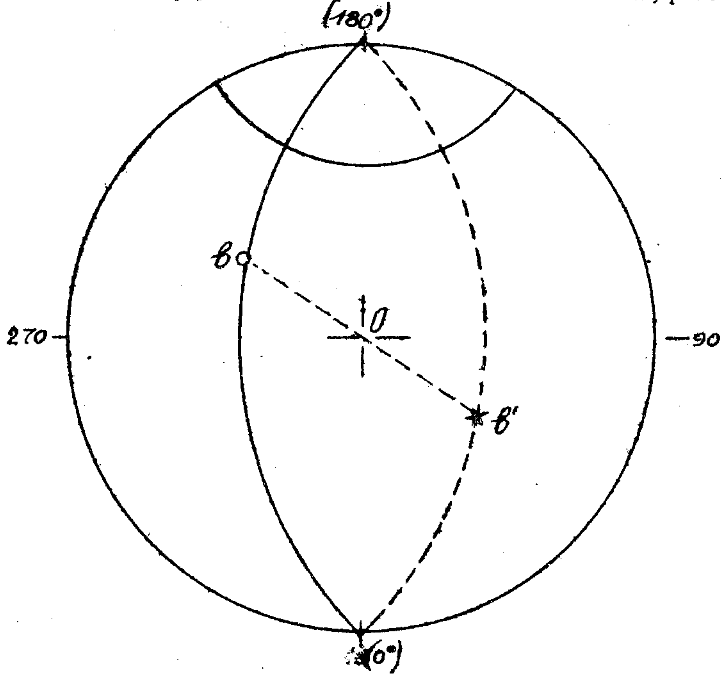
1). По А.К. Болдыреву: 1) Точки меридиана, находящиеся ниже чертежа (черт. 19) переносятся оставаясь в плоскости меридиана, в верхние, диаметральные точки, следовательно дуга Ob180° служит изображением как нижнего полукруга, так и верхнего; 2) точно также и точка B$'$ - переносится в B и проектируется на меридиане где и b, но



Черт. 19.

только должна быть обозначена крестиком. Точки CC параллели, лежащие в плоскости чертежа, преобразуются в $C'C'$ - диаметрально противоположные. Нижний полукруг преобразуется в параллель того же градуса около нижнего полюса и проектируется (пунктиром) в дугу $C'm'C'$. Таким образом, полная проекция параллели $CmCC'm'C'$.

2) По Г.В.Вульфу (черт.20). Нижняя половина меридиана, проектируемая из верхнего полюса, расположится симметрично (она прочерчена пунктиром). Точки B и B', как диаметрально противоположные, должны отстоять в плоскости меридиана на 180° друг от друга, т.е. лежать на прямой линии bOb'. Нижняя параллель спроектируется туда же, где и верхняя, т.е. с ней сольется. В дальнейшем мы будем пользоваться приемом Г.В.Вульфа.



Черт. 20.

З а д а ч а 2. (таб. II). Определить координаты точек, заданных на чертеже. Задача, обратная предыдущей. Чтобы решить ее нужно знать, где расположен полюс координат. Если, полюс в центре, то поступаем так: приводим точку на экватор 0 - 90°, центрируем возможно тщательнее чертеж на сетке, и отсчитываем от центра $\rho°$. Смотрим, где индекс и отсчитываем по нему координату φ, считая начало углов φ в нижнем полюсе сетки, и счет ведя против часовой стрелки. При отсчете ρ необходимо следить в какой полусфере точка: в верхней (кружок) или нижней (крестик).

З а д а ч а 3. Через точки a и a_5 провести дугу большого круга (таб. II).

По свойству теоремы IV проекция большого круга должна пройти через две диаметрально противоположные точки окружности проекций. В меридианах сетки мы имеем набор кругов различно наклоненных к плоскости чертежа. Воспользуемся ими. Если обе данные точки лежат выше чертежа, поворачиваем чертеж до тех пор, пока обе точки не окажутся на одном меридиане и прочерчиваем этот меридиан от руки, пользуясь сеткой как транспорантом, в данном случае это будет меридиан, отстоящий от полюса на $63\frac{1}{2}^\circ$. Если одна из точек выше (a_6), а другая ниже плоскости чертежа (b), то приводим их на равноотстоящие от 0 меридианы (ибо нижняя половина меридиана из верхнего полюса спроектируется симметричной дугой) и проводим обе дуги верхнюю сплошной чертой, а нижнюю пунктиром.

З а д а ч а 4. Измерить угловое расстояние между двумя точками, заданными на сетке, например, между a и a_5 или между b_1 и a_6 (таб. II).

Меридианы сетки разбиваются параллелями на равные угловые промежутки в 2°. Этим и воспользуемся. Приведя точки на один меридиан, отсчитываем по меридиану сколько между точками помещается параллелей, а отсюда и сколько градусов (нечетные градусы и доли градусов отсчитываем на глаз) ($\smile aa_5 = 83^\circ$). Если точки лежат на разных половинках шара, то приводим их на симметричные меридианы, отсчитываем градусы до полюса от каждой точки и числа эти складываем. ($\smile a_6 b = 64^\circ + 26^\circ = 90^\circ$).

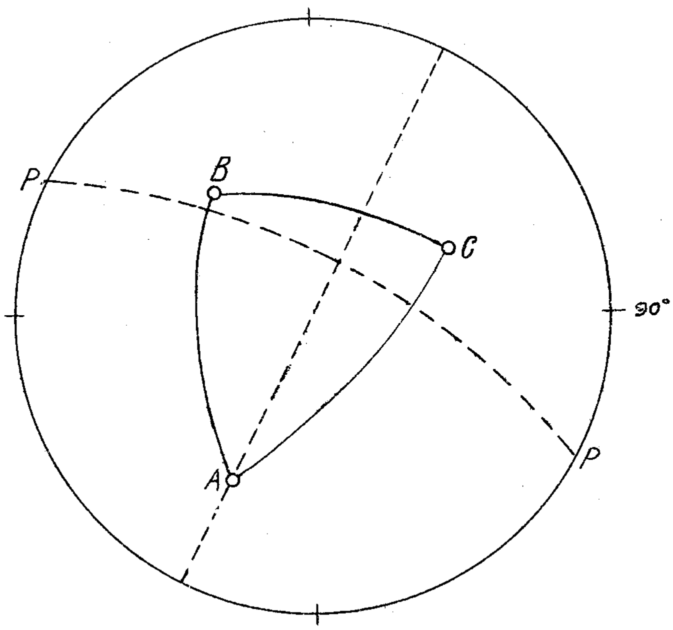
З а д а ч а 5. Найти выход полюса дуги большого круга aa_5 (таб. II).

Точка эта будет отстоять на 90° от всех точек дуги. Для нахождения ее совмещаем дугу с меридианом и от m - точки пересечения дуги с экватором - по экватору через центр отсчитываем 90°, получим точку p.

З а д а ч а 6, обратная №5. Принимая точку p за выход полюса и дуги, построить дугу (таб.II).

Совместим точку р с экватором, откладываем к центру 90° и через полученную точку ш, не сдвигая чертежа, прочерчиваем меридиан. ama5

З а д а ч а 7. Измерить углы данного сферического треугольника АВС (черт.21).



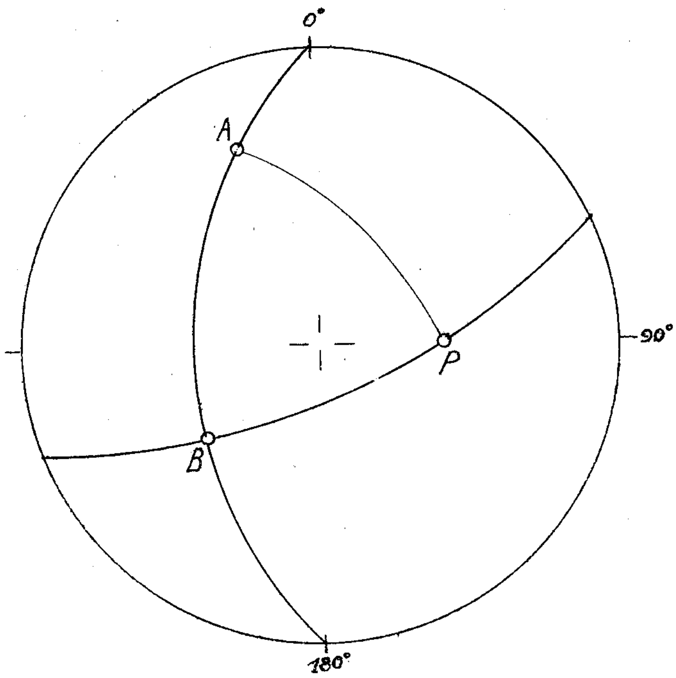
Черт.21.

Если вершину А треугольника примем за полюс, то на полярной дуге рр к этому полюсу стороны или продолжения сторон сферического треугольника отсекут угол, равный А. Зная это, поступаем так: концентрическим вращением приводим точку А на экватор, отсчитываем в сторону к центру 90° через полученную точку проводим меридиан (мысленно или действительно) и смотрим сколько заключается градусов между сторонами АВ и АС. Также и для других углов В и С.

З а д а ч а 8. Построить о к т а н т, т.е. сферический треугольник, у которого все углы и все стороны равны 90 (1/8 доля шара) (черт.22).

Берем произвольную дугу большого круга и на ней точку А. Принимая А за полюс, рисуем экватор, который пересечет данную дугу положим в точке В. Теперь В примем за полюс и к нему чертим экватор, очевидно, проходящий через А.

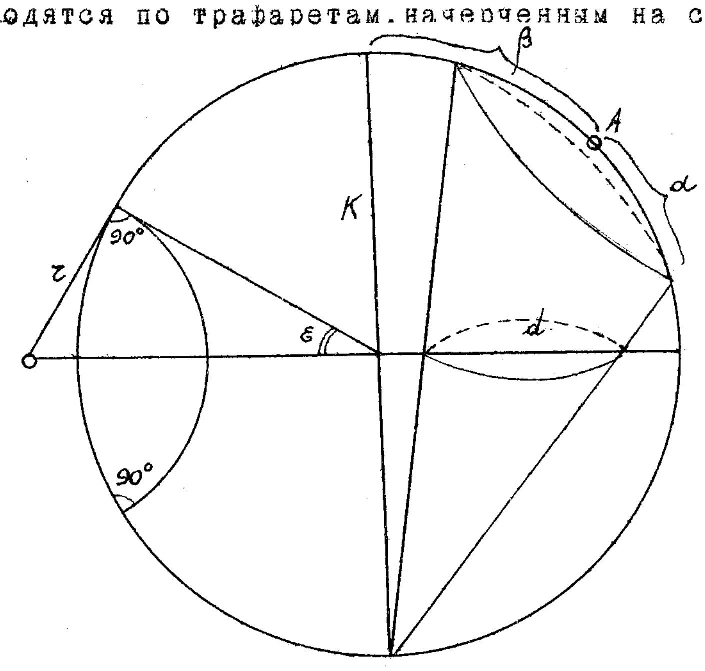
З а д а ч а 9. Найти геометрическое место точек, отстоящих от данной точки А на угол $\alpha = 43^\circ$.



Черт.22.

Вообразим себе это построение на сфере; очевидно, (черт.23) таким геометрическим местом будет малый круг с центром в А ("сферический центр") и с радиусом, равным дуге $\alpha = 43^\circ$ ("сферический радиус"). Этот малый круг в проекциях изобразится кругом же.

Так как на сетке Вульфа циркуль не употребляется, то все круги проводятся по трафаретам, начерченным на сетке: для нахождения трафарета малого круга поступаем двояко:



Черт.23.

1-ое р е ш е н и е (по точкам): Пусть на таб.II проекция сферического центра А будет точка р. Мы можем провести через р ряд меридианов и по ним отложить от точки p угол α°. Полученные точки соединить кривой. Эту же операцию мы проделаем и в проекциях. Для этого приводим точку p на один из малых кругов (параллелей сетки) и откладываем по меридиану, проходящему в этом положении через точку p вверх и вниз угол α°, поворачиваем чертеж чтобы p совместилась со следующей параллелью и повторяем отложение угла α по меридиану. В результате получим ряд точек искомой окружности. С д в и г а я ч е р т е ж с ц е н т р а подбираем среди параллелей одну, кривизна которой соответствует кривизне нашего круга и по ней, эксцентрически вращая, очертим всю окружность.

2-ое р е ш е н и е. Найдем геометрический центр малого круга, который, мы знаем, не совпадает с полюсом p (таб. IV).

Для этого, поместив точку p на экватор меридиональной сети (восковка должна быть центрирована) отыскиваем четыре точки искомого круга: отсчитав α° по меридиану, проходящему через p, вверх и вниз найдем точки a_1' и a_2'; отсчитав по экватору к центру α° получим точку a'; если это возможно, то от p к периферии также откладываем α° и находим a''. Если же при отсчете упремся в край сетки, то излишек отсчитываем к центру и точку обозначаем крестиком.

Мы знаем (стр. 27), что геометрический центр c лежит на линии Op. Прочертим поэтому эту прямую несколько за p (на 0,5 - 1,0 см.). Затем, точка c должна находиться на перпендикуляре к хорде $a'a_1'$, или иначе говоря, на прямой, относительно которой точки a' и a_1' (а также точки a' и a_2') симметричны.

Поэтому поступаем так: помещаем точки a' и a_1' на какой либо (безразлично какой) меридиан сетки и двигая восковку эксцентрично, добиваемся, чтобы точки a' и a_1' лежали симметрично относительно экватора меридиональной сети, т.е. чтобы давали по этому меридиану одинаковый отсчет; когда это достигнуто, то слегка прочерчиваем пря -

мую по экватору; где она пересечет продолжение прямой Op, там и будет искомый центр – C.

Далее можно, сняв восковку с сетки (чтобы не портить последнюю) прочертить малый круг циркулем (радиусом $ca' = ca_1 = ca_2$) или же воспользоваться трафаретами той же меридиональной сети.

Как мы знаем, радиус малого круга с центром в точке Z шара, после проектирования на сетку равен $r_1 = R.\operatorname{tg} \rho/2$, где ρ сферический радиус этого круга (такой круг, очевидно, будет параллелью центральной сети координат). Круг же с центром на периферии сетки (параллель меридиональной сети) имеет $r_2 = R.\operatorname{tg}\varepsilon$, где ε – его сферический радиус. Так как полюс круга лежит на окружности проекций, то ε легко отсчитать по кругу от полюса до окружности малого круга (если последняя начерчена).

Если положим $r_1 = r_2$, то $\operatorname{tg} \rho/2 = \operatorname{tg}\varepsilon$ и так как оба угла ρ и ε меньше 90°, то значит:

$$\frac{\rho}{2} = \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

отсюда правило:

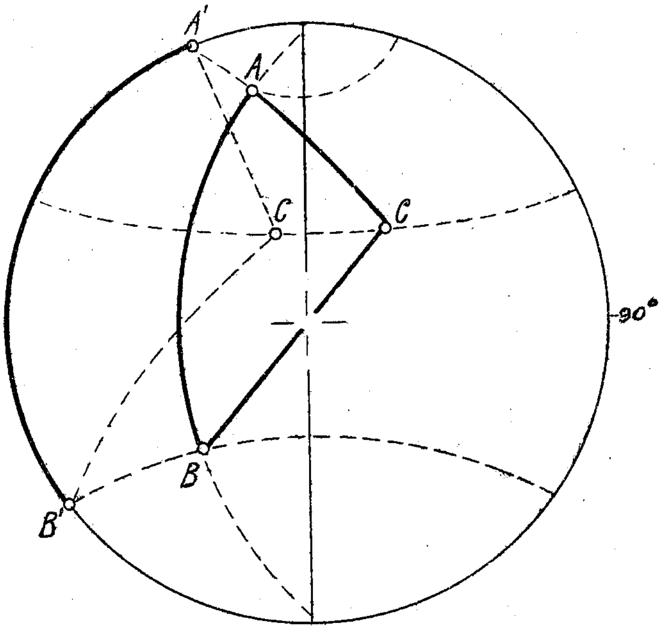
Найдя точку c, помещаем ее в центр сетки O, а точку a' совмещаем с прямолинейным экватором; отсчитываем ρ° в точке a' и берем его половину; это определит нам ε, т.е. сферический радиус параллели меридиональной сетки, кривизна которого равна кривизне искомого круга; в данном случае $\rho = 45^\circ$ и $\varepsilon = 22\frac{1}{2}^\circ$; находим эту параллель, помещаем на нее попарно точки a' и a_1' и a' и a_2' и прочерчиваем окружность по частям, эксцентрически вращая восковку по найденной параллели. Операция эта совершается быстро и достаточно точно.

Если точка a'' в верхней полусфере, то она лежит на том же круге с кривизной ε. Если же a''' ниже плоскости чертежа и проектируется по правилу проф. Г.В. Вульфа, из точки Z, то для пунктирной дуги $a_1 a''' a_2$ должна быть найдена своя ε', которая находится совершенно тем же приемом. Впрочем, если дуга $a_1 a''' a_2$ пологая, то ее проще найти непосредственно подбирая ту параллель, на которой бы одновременно лежали три точки: a_1, a''' и a_2.

З а д а ч а 10. Через три точки a', a_1' и a_2' заданные в проекциях, провести окружность малого круга (таб. II).

Сначала найдем точку, равноотстоящую от данных трех т.е. центр круга описанного по отношению к сферическому треугольнику $a'a_1'a_2'$. Для этого помещаем точки a' и a_1' на один меридиан и симметрично по отношению к экватору и прочерчиваем линию симметрии, также и для пары точек a' и a_2'. Найдя центр С, помещаем его в центр сетки и отсчитываем определяющий угол для радиуса (в данном случае 45°). Следовательно $\varepsilon = 22\frac{1}{2}°$ и далее как во втором решении задачи 9.

З а д а ч а 11. Построить сферический треугольник по трем сторонам (черт. 24).



Черт. 24.

Если даны только величины сторон (конечно в градусах), а положение ни одной из сторон не задано, то выбираем одну из сторон на экваторе сетки, пусть $A'B'$. У точки A' строим малый круг радиуса АС для чего совместив A' с полюсом сетки, прочерчиваем параллель, заключающую АС°. (В этом случае, как известно α = АС) точно также около В описываем окружность радиусом ВС. Пересечение этих дуг даст искомую вершину С. Если же положение одной из сторон задано внутри сетки, то можно поступать двояко:

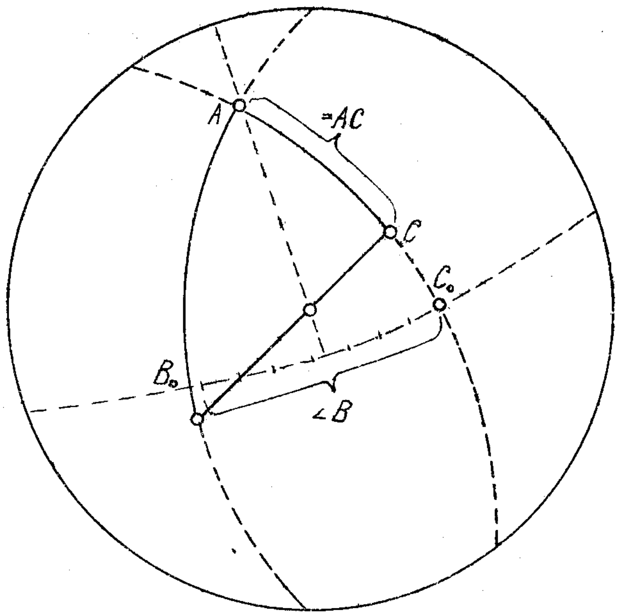
1-ое р е ш е н и е: Около точки А описываем малый круг радиусом АС, а около В радиусом ВС (задача 10) точки пересечения этих кругов (обычно 2) дадут нам два решения задачи (Если круги коснулись - одно решение; если не пересеклись - задача невозможна).

2-ое р е ш е н и е: (С.м.Романова). Дугу АВ приводим на меридиан сетки. Точки А и В вращением по параллели переносим на экватор (пусть для этого потребовалось повернуть меридиан на 48°) в точки A' и B'. Около них, как об'яснено выше строим точку C', а ее обратным вращением по параллели на те же 48° переносим в точку С, которая и будет искомой. Для сравнения см. задачи 21 и 22.

З а д а ч а 12. Найти точку, отстоящую от данной точки А на $\alpha°$, а от данной точки В на $\beta°$.

Очевидно, это другая формулировка задачи 11; решается точно также.

З а д а ч а 13. Построить сферический треугольник по двум сторонам АВ и АС и углу А между ними. (черт. 25).



Черт. 25.

На дуге большого круга откладываем число градусов, равное одной из данных сторон и получаем точки А и В.

Считая А за полюс, проводим нормальную дугу на которой откладываем число градусов, заключающихся в данном угле А (от точки B_0 пересечения дуги B_0C_0 с дугой АВ). Полученную точку C_0

соединяем с А (зад.4) и на этой дуге от А откладываем вторую сторону, получим искомую третью вершину треугольника С.

Задача 14. Построить сферический треугольник по стороне АВ и двум прилежашим углам ∠А и ∠В (без чертежа).

Для А и В строим нормальные дуги (как в предыдущей задаче) и от точек пересечения их с дугой АВ откладываем в нужном направлении дуги равные углам А и В. Соединяем с точками А и В дугами, пересечение коих даст третью вершину С.

§2. Задачи, встречаемые в кристаллографии.

Первая кристаллографическая задача состоит в том, чтобы по измеренным углам между гранями кристалла уметь нанести на чертеж проекции нормалей к граням. Самое измерение производится гониометрами. Простейшие из них - прикладные - дают угол между двумя соседними гранями с точностью до 1°. Более совершенные - отраженные, теодолитного типа - дают сразу полярные координаты нормалей к граням, с точностью до $1' - 5''$.

Задача 15. Построить проекции нормалей к граням ("нормалевый кристаллический пучек") измеренный теодолитным гониометром со следующими результатами:*

N грани........	1	2	3	4	5	6	7	8
Долгота нормали	20°	92°	200°	272°	85°	265°	122°	302°
Полярное ее расстояние........	90°	90°	90°	90°	76°	76°	43°	43°

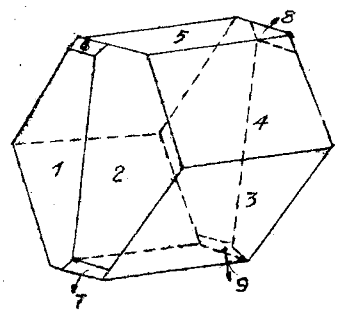
Здесь полюс сетки мы должны соединить с полюсом координат, т.е. пользоваться зенитной координатной сетью. Нанесение просто, см. задачу 1.

*Пример этот и следующий взяты из курса кристаллографии А.К.Болдырева.

З а д а ч а 16. Дан кристалл (см.черт.26).Двугранные углы между гранями измерены прикладным гониометром:

Смежные грани между которыми измерены углы.	Углы между гранями	Углы между нормами	№ угла по порядку.
1/2.	146°	34°	1
1/6 = 2/7 = 1'/8 = 2'/9	139°	41°	2
1/3' = 1/4' = 2/3 = 2/4	104°	76°	3
1/5' = 2/5	90°	90°	4
1/7 = 2/6 = 2'/8 = 1'/9	128½°	51½°	5
3/4	116°	64°	6
3/5' = 4/5	122°	58°	7
3/7 = 1/8 = 3'/6 = 4'/9	122½°	57½°	8
5/6 = 5'/7 = 5/8 = 5'/9	131°	49°	9

Прежде всего заметим,что большинство граней данного кристалла имеют себе параллельные.Такие грани обозначены на рисунке той же цифрой только со значком .Грани 6, 7 8 и 9 не имеют себе параллельных.



Черт.26.

От нас зависит,как п о с т а в и т ь кристалл на сетке.Примем грань 5 совмещенной с картинной плоскостью(см. таб.III) тогда она изобразится в центре проекций.Грани же 1 и 2,образующие с 5-ой углы в 90° попадут на экватор сетки.Итак:отмечаем грань 5 в центре сетки кружком; грань 1 наносим произвольно на экваторе;2 наносим на экваторе так,чтобы ∠1/2 (между нормалями) = 34° и грань 2 была бы вправо от грани 1 (сообразно рисунку;если не сообразоваться с рисунком,то можно построить не данный кристалл,а его зеркальное изображение).Проекции 1' и 2' найдутся на экваторе,в диаметрально противоположных 1 и 2 точках.

Теперь займемся гранями $3'$ и 6. Нам известны углы, которые делают нормали к этим граням с нормалями к 5 и к 1. Таким образом, задача сводится к построению точки по заданным двум расстояниям от нее точек 1 и 5, т.е. к задаче №1.2. Получатся две точки: нужно выбрать ту из них, которая отвечает направлению нормали согласно рисунка, (нормаль к $3'$ идет влево от линии 5-1, если грань 1 повернуть к себе вниз). Так же строим и 6 по углам 1/6 и 5/6, при чем здесь круги касаются и решение получается срзу однозначным. Правильность положения граней $3'$ и 6 поверяем по углу $3'/6$*. Далее переходим к построению других граней например, 4, и т.д. Грани на нижней полусфере проектируются из верхнего полюса. Окончательно получается чертеж, изображенный на таблице III.

В кристаллографии очень часто нанесенный на сетку пучек нормалей вращают как целое, совмещая с центром сетки то ту то иную грань или ось зоны (ребро) (это делается как для более легкого обнаружения симметрии кристалла, так и для осуществления некоторых построений). Вращения мы и рассмотрим.

З а д а ч а 17. Найти ось, при вращении около которой, точка A совместится с B (черт.27). Каков при этом будет угол вращения и куда придет точка D, лежашая близ края круга проекций?

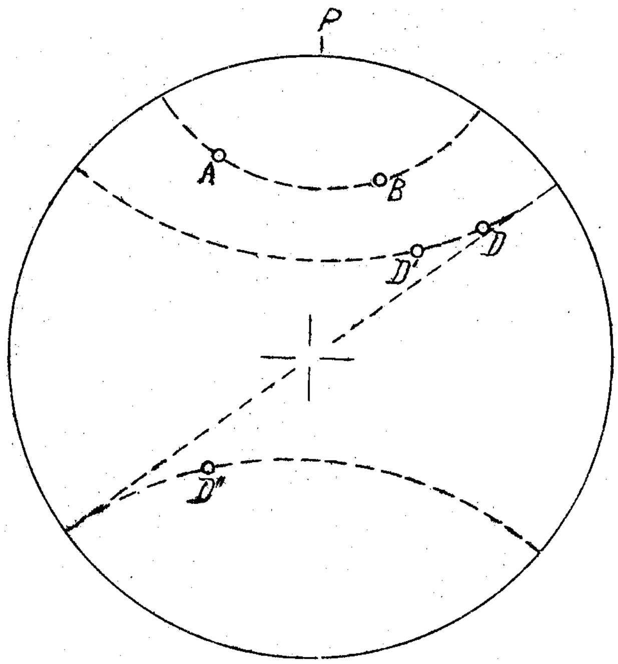
При вращении шара около какой либо оси, точка шара A будет вращаться по дуге малого круга; так как точка A должна придти в B, то она с B должна быть на одной параллели. Поэтому вращением около центра приводим A и B на одну параллель. Число меридианов между A и B даст нам угол поворота. У нас он пусть = 70°. Точка D пойдет по параллели до экватора пройдя 25°. Далее она перейдет в нижнюю полусферу. Если мы будем следовать правилу Вульфа (стр. 37), то она далее пойдет по той же параллели обратно, до точки D. Если же по правилу Болдырева, то она

---

*Как измерить угол 3'/6 - см. зад. 4 стр. 39.

перейдет в диаметрально притвоположную точку экватора и теперь по параллели на 45° до D".

Задача 18. Найти угол поворота, при котором дуга большого круга AB совместится с основным кругом проекций? (черт.25)



Черт.27.

Вращением около центра совмещаем дугу AB с меридианом сетки. Искомая ось теперь проходит через полюсы сетки. Угол поворота отсчитываем по экватору от меридиана дуги AB до окружности проекций.

Задача 19. Найти ось и угол поворота, при котором дуга большого круга AB совместится с дугой CD (без чертежа).

Две дуги большого круга совместятся, если совместить их полюсы, поэтому задача сводится к задаче № 17.

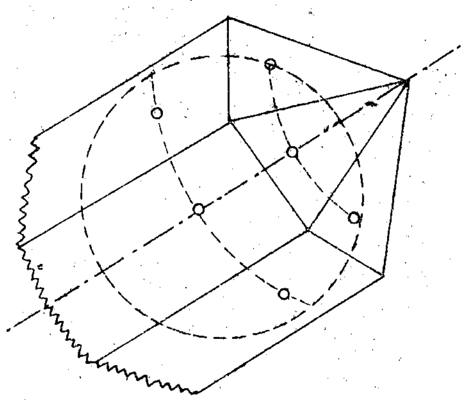
Отметим, как изобразятся разные важные линии и плоскости.

Точками в проекциях изображаются: грани нормального пучка, ребра обычного пучка; координатные оси OX, OY, OZ; проекции оси симметрии, т. е. такой оси при вращении около которой на угол < 360° пучек совместится сам с собой.

Дугами больших кругов изображаются: 1) Координатные плоскости XY, XZ, YZ; 2) Грани обычного кристаллического пучка; 3) Плоскости симметрии кристалла, т.е. такие плоскости, при зеркальном отражении в которых, пучек совместится сам с собой.

Далее, полезно еще заметить следующие две вещи:

1) Если проекции нормалей нескольких граней лежат на одной дуге большого круга, то все грани параллельны нормали к плоскости этой дуги и составляют как говорят — о д н у з о н у, пересекаясь по параллельным ребрам (черт. 28).



Черт. 28.

2) Если проекции нормалей нескольких граней лежат на окружности малого круга, то все они пересекаются в одной точке, давая телесный угол (черт. 28)

З а д а ч а 20. Определить форму грани идеального многогранника* A, проекции граней которого A, B_1, B_2 ..... нам даны (черт. 29 a и b).

Р е ш е н и е. Чтобы построить идеальный много - гранник надо вообразить, что точки A, B_1 и т.д. на шаре и провести через них плоскости, касательные к шару. Взаимные пересечения этих плоскостей и ограничат фигуру граней.

Вообразим сечение шара меридианом MAN и изобразим это сечение на черт. 29 b. Грани A и B изобразятся линиями AK и KB, касательными к кругу MAN. Так как AO есть нормаль к грани A, и BO нормаль к грани B, то плоскость AOB (т.е. плоскость черт. 29 b) перпендикулярна к ребру пересечения плоскостей A и B в точке K. Кроме того прямоугольные треугольники AOK и BOK равны (общая гипотенуза и равные катеты $OA = OB$), следовательно $AK = KB$ и $\angle AOK = \angle BOK = \rho/2$, если ρ - угол между нормалями к граням A и B - $\angle AOB$. Но угол ODB также равен $\rho/2$ (угол $AOB = \rho$ есть внешний для равнобедренного треугольника SOB, поэтому он равен $\rho = \angle OBB_1 + \angle OSB_1$; $\angle OBB_1 = \angle OSB_1 = \rho/2$). Поэтому треугольники AOK и OSB_1 равны, $\Delta AOK = \Delta OSB_1$ и

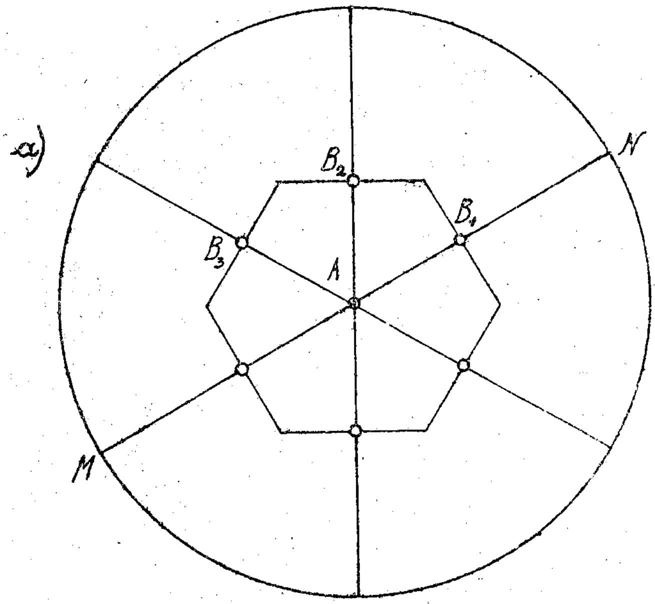
$$AK = OB_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

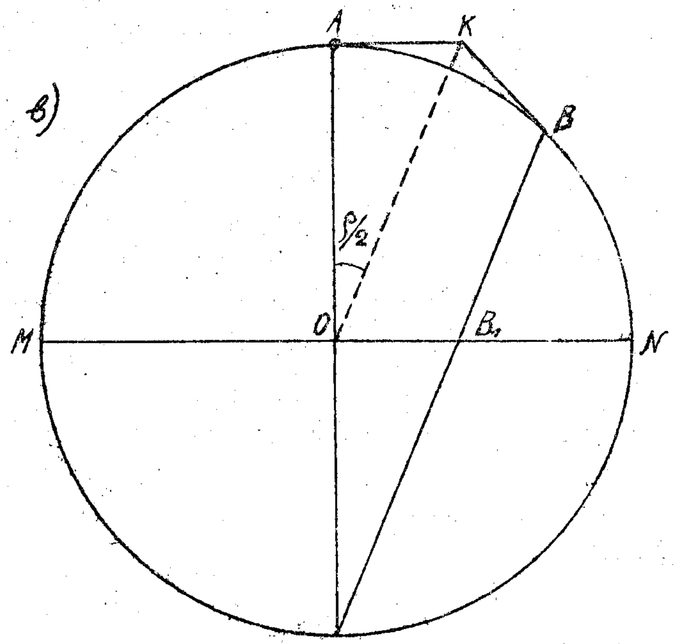
*См. стр. 20.

Отсюда мы видим, что если грань А находится в центре, мы в проекциях имеем все размеры, нужные для построения формы этой грани и профиль (или профили) строить не нужно (он нам был нужен лишь для выяснения).

Строим так: точку А соединяем прямыми с окружающими гранями; в точках граней B_1 B_2, B_3 и т. д. проводим перпендикуляры к прямым. Полученная фигура обрисует грань А в натуральную величину.

Чтобы построить другую грань например B_2 нужно сначала весь пучек вращением повернуть так, чтобы грань B_2 оказалась в центре, а затем поступить как указано.





Черт. 29.

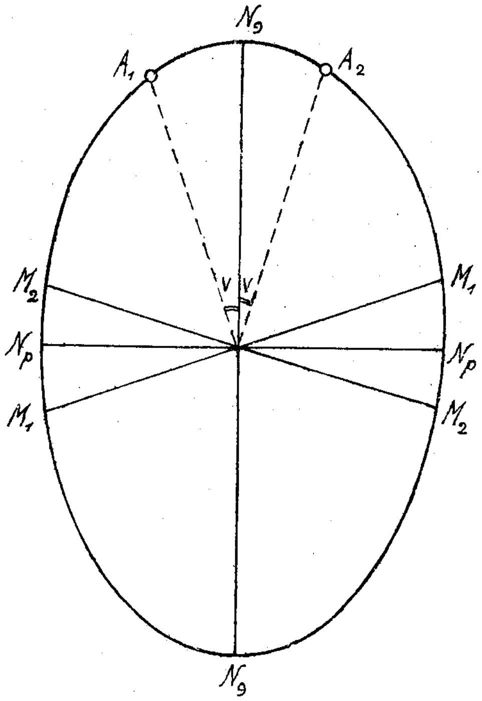
§3. Кристаллооптические задачи.

При распространении света в кристаллическом веществе, скорость его распространения зависит от упругих свойств кристалла, вообще говоря меняющихся по различным направлениям. И показатели преломления, которые представляют собою величины, обратные скоростям, также меняются в зависимости от того по какому направлению идет световой луч в кристалле. Если мы измерим в данном кристалле показатели преломления по всем направлениям, около какой либо точки пространства проведем лучи и на них отложим отрезки, пропорциональные показателям преломления по соответствующему направлению, то мы получим в общем случае поверхность трехосного эллипсоида, который называется э л л и п с о и д о м у п р у г о с т и или эллипсоидом показателей преломления данного вещества. Наименьшая ось N_p будет отвечать наименьшему показателю преломления, наибольшая к первой всегда перпендикулярная, будет отвечать наибольшему показателю преломления N_g; средняя ось эллипсоида N_m перпендикулярная и к N_p и к N_g даст средний показатель преломления, так как $N_p < N_m < N_g$

В плоскости $N_g N_p$ показатель преломления света меняется от минимума (по оси N_p) до некоторого максимума (по оси N_g) и по некоторому направлению $M_1 M_1$ и по симметричному с ним $M_2 M_2$ преломление равно тому, какое существует по оси N_m (черт. 30). Это так называемые к р у г о в ы е с е ч е н и я эллипсоида. Их два. Нормали к круговым сечениям лежат также в плоскости $N_g N_p$ - они будут A_1 и A_2.

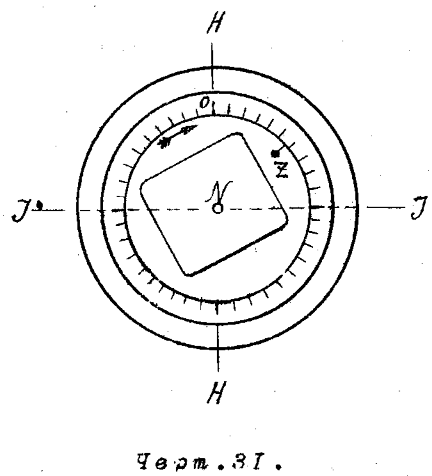
По направлениям OA_1 и OA_2 луч света не испытывает раздвоения, благодаря какому свойству эти направления легко могут быть узнаны. Они называются о п т и ч е с к и м и о с я м и, а кристаллическое вещество в этом случае д в у о с н ы м. Если, в частном случае

$N_m = N_p$ или $N_m = N_g$, то обе оси сливаются с одной из осей эллипсоида в о д н у и вещество называется о д н о о с н ы м. Наконец, если $N_m = N_g = N_p$ то вещество изотропно (эллипсоид превращается в сферу).



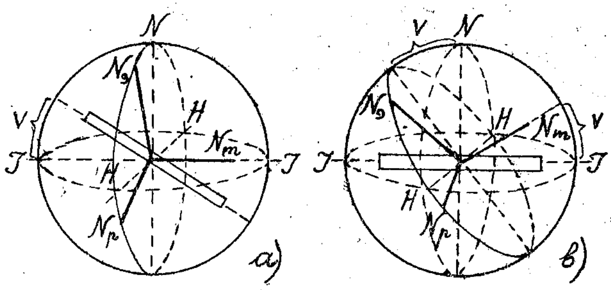
Черт. 30.

При изучении шлифов на столике Е.С.Федорова шлиф, вырезанный из кристаллического зерна в случайном положении (см. черт.31 и черт.32 b) может быть вращаем около двух осей: оси N, перпендикулярной к плоскости шлифа, и оси H, лежащей в плоскости шлифа, благодаря чему мы можем главные плоскости, расположенные в шлифе в случайном положении, привести в положение перпендикулярное оси I - I. Что такое совмещение произошло, замечают по некоторым оптическим явлениям, пользуясь осью I-I.



Черт. 31.

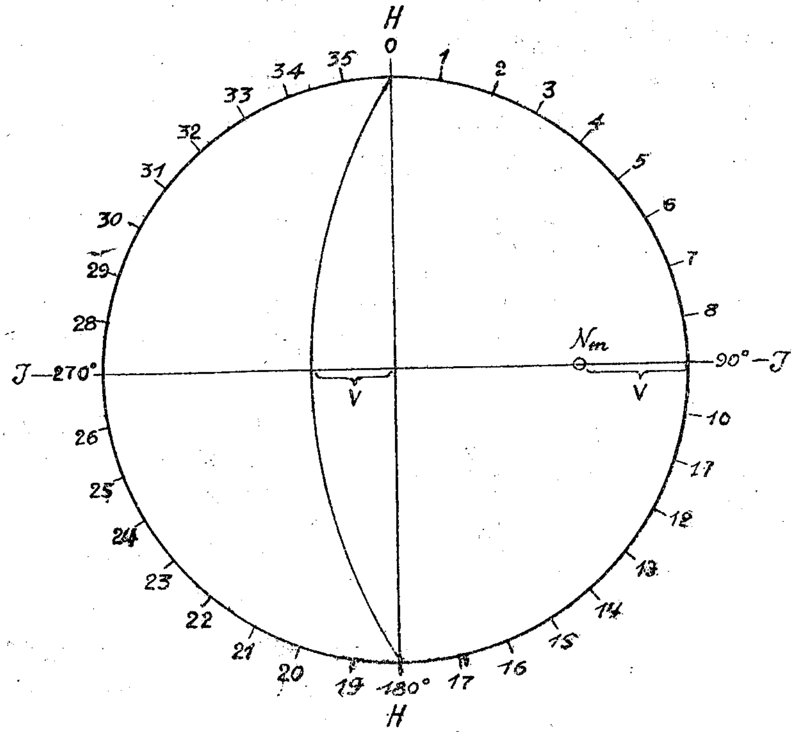
Когда такое совмещение произошло, записывают координаты - φ - по индексу Z и ν угол наклона плоскости шлифа к горизонтальной при вращении вокруг оси H; при нанесении на сетку примем, что ось H-H совмещена с осью 0-180°, т.е. с осью сетки, а ось I-I ей перпендикулярна и лежит в плоскости чертежа. Пусть нас интересует ось N_m, занимающая в шлифе случайное положение как на рис 32 b, представляющем разрез шлифа рис.31 плоскостью проходящей через ось Л столика Е.С.Федорова перпендикулярно к плоскости шлифа. Вращая шлиф в его плоскости около оси N, мы можем ось N_m привести в плоскость чертежа 32 b - плоскость проходящую через ось I и перпендикулярную оси Н. Теперь, наклонивши шлиф около Н на угол ν можем совместить N с I, как показано на черт.32 а.



Черт.32.

На сетке мы будем представлять себе, что восковка, на которой наносится чертеж - это плоскость шлифа и нам надо нанести положение оси N_m когда шлиф горизонтален (т.е. совпадает с плоскостью чертежа). Пусть у нас отсечет по индексу Z (черт. 32) дал $\varphi°$, а наклон Н был вправо на $\nu°$ (черт.32 а) и тогда ось N_m совпала с осью I, (в чем мы убедились по сохранению темноты при вращении около оси I). Плоскость же $N_g N_p$ перпендикулярна к N_m и изобразится в проекции в виде прямой 0-180° черт.33 . Когда мы обратно шлиф повернем в горизонтальное положение, ось N_m правым концом переместится по экватору сетки на $\nu°$ и займет положение указанное на черт.33 . Плоскость, в которой лежат две другие оси, т.е. плоскость $N_g N_p$ при этом обратном движении также наклонится влево на $\nu°$ и может быть легко построена как перпендикуляр к N_m.

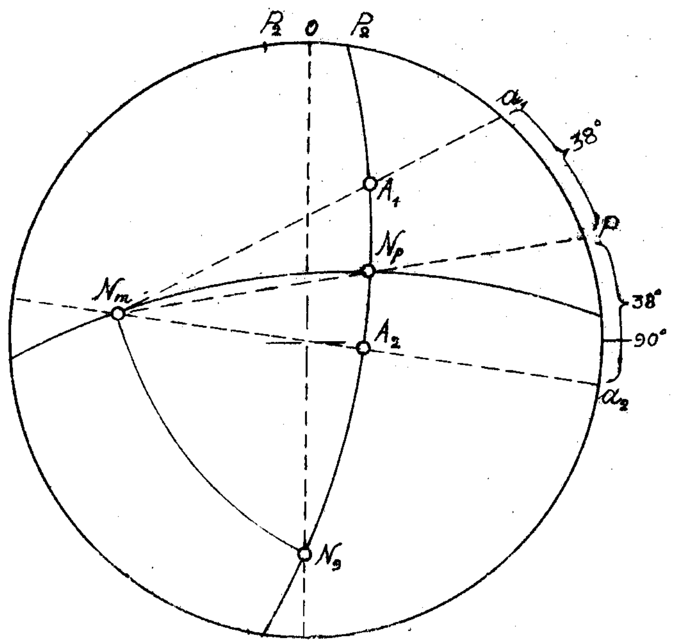
Итак, чтобы нанести одну из осей эллипсоида (скажем N_m) совмещенную с осью I столика, и перпендикулярную к этой оси главную плоскость эллипсоида ($N_g N_p$) по данным φ отсчету на лимбе столика и ν - углу под'ема при вращении около оси Н - нужно: индекс на восковке совмес - тить с отсчетом $\varphi°$ на сетке; по экватору сетки к центру отсчитать ν от того конца совмещенной оси, который лежит в верхней полусфере при горизонтальном положении шлифа (т.е. если наклон шлифа был в п р а в о - то от правого края сетки к центру) и отметить кружочком точку N_m. Отложив от точки N_p к центру 90°, проведем про-



черт. 33.

екцию плоскости перпендикулярной N_m, т.е. $N_g N_p$. Двойственность отсчета ν - наклон около оси H то вправо то влево - может повести к некоторой путанице при построениях. Чтобы ее избежать, мы будем поступать следующим образом: заметим, что вместо того, чтобы откладывать на чертеже ось от левого края сетки можно увеличить (или уменьшить) φ на 180° - ту же точку на том же месте чертежа отложить от правого края сетки. Следовательно, отсчет N_m, φ и ν - влево равносилен отсчету: $\varphi + 180^\circ$ и ν справа; поэтому мы уже при замерах будем все отсчеты проводить к "правой позиции" - и когда у нас наклон в л е в о на ν - то φ будем увеличивать на 180°. При таком условии мы строить оси всегда должны будем от правого края сетки. Очевидно φ и ν для оси будут долготой и широтой. Мы их по прежнему будем писать по правилу Декарта, в виде прямых скобок, внутри которых первое число будет значить долготу φ, а второе - наклон около оси H - ν. Например, ось N с координатами $\varphi_1 = 38°$ и $\nu = 22°$ вправо запишется: N_g [38°, 22°], а ось N_p с координатами $\varphi_2 = 112°$ и $\nu = 27°$ влево запишется: N_p [292°, 27°].

З а д а ч а 21. Даны координаты двух осей эллипсоида: N_g [266°, 26½°] и N_m [7½°, 20°]. Построить все три оси эллипсоида (черт. 34).



Черт. 34.

Двух осей вполне достаточно, ибо каждая ось определяет одновременно и плоскость двух других осей, к которой эта ось перпендикулярна а пересечение этих плоскостей определит третью ось. Все три оси находятся друг от друга на 90° и вместе составляют о к т а н т (см. зад. 8).

Р е ш е н и е. Ставим индекс на 266° и от к р а я с е т к и отсчитав 26½°, наносим N_g; далее отсчитав к центру 90°, прочерчиваем дугу, на которой должны лежать оси N_m и N_p. Затем ставим индекс на 7½° и отложив 20° наносим N_m и перпендикулярную к ней дугу N_g N_p. Пересечение дуг даст ось N_p. Проведя к N_p нормальную дугу, убедимся что она пройдет через N_m и N_g - это надежная проверка правильности построения.

З а д а ч а 22. Дан эллипсоид (см.черт.34) и дано что угол между оптическими осями равен 76°, причем биссектрисой этого угла служит ось N_p. Построить оси A_1 и A_2.

Р е ш е н и е. Приводим плоскость $N_g N_p$ в совмещение с меридианом сетки и отсчитываем от N_p по $76^\circ : 2 = 38^\circ$, получим точки A_1 и A_2 которые и будут искомыми.

З а д а ч а 23. Даны два эллипсоида, принадлежашие кристаллам, находяшимся в двойниковом сростании, один: $N'_g[203^\circ, 50^\circ]$, $N'_p[113^\circ, 0^\circ]$ и другой $N''_m[167^\circ, 13^\circ]$ и $N''_g[73^\circ, 18\frac{1}{2}^\circ]$ построить оба эллипсоида и найти "двойниковую ось", т.е. ось, после поворота около которой на 180° один эллипсоид совместится с другим (таб. IV).

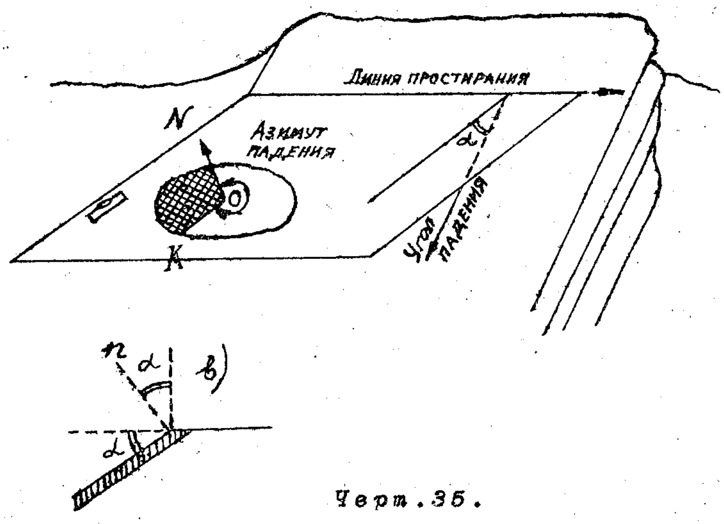
Р е ш е н и е. Строим эллипсоиды, как в задаче 21. Проводим дугу большого круга через N'_g и N''_g. Двойниковая ось должна лежать на этой дуге. Также проведем дуги $N'_p N''_p$ и $N'_m N''_m$ – ось должна лежать также и на них. Теоретически эти три дуги должны пересечься в одной точке B, которая и будет искомой осью. Практически это будет треугольник погрешности, центр которого и определит нам точку B.

§4. Горногеометрические задачи.

Положение пласта какой либо горной породы в пространстве, принимаемой за плоскость, в геологии задается т.н. азимутом падения и углом падения (см.черт.35).

В пласте всегда есть линия параллельная горизонтальной плоскости. Эта линия называется л и н и е й п р о с т и р а н и я. Перпендикулярно к ней идет линия наибольшей крутизны, называемая л и н и е й п а д е н и я. Угол между направлением на север (N) и направлением падения – т.е. угол NOK и будет азимутом падения. Угол же наклона плста к горизонту α – будет угол падения.

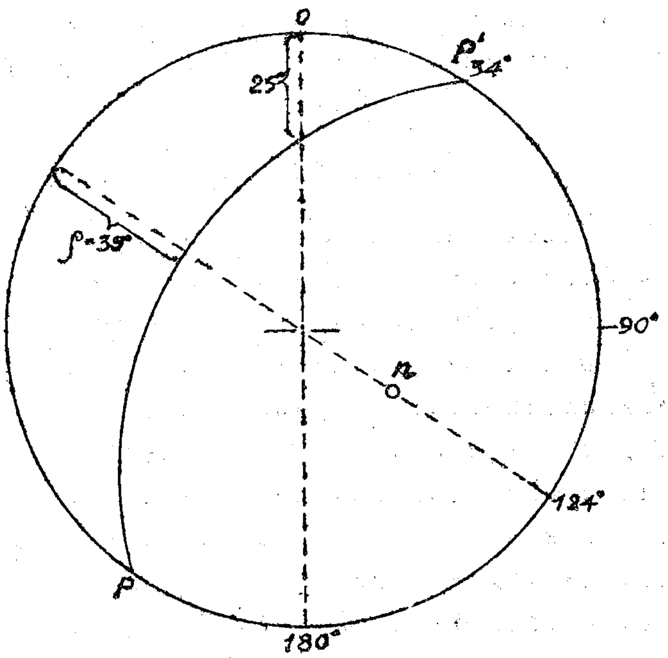
Пусть (черт.35 b) n – нормаль к пласту. Азимут φ определит плоскость, в которой лежит нормаль, т.е. д о л-г о т у нормали, а угол α - полярное расстояние нормали. Следовательно если задан пласт P, у которого азимут падения SO 124° и угол падения α = 39, то его нормаль P_n (124°, 39).



Черт. 35.

З а д а ч а 24. Дан пласт, азимут падения которого 124°SO а α = 39°. Найти: 1) азимут линии простирания и 2) определить какой уклон пласта по направлению точно на юг, т.е по азимуту 180 (черт. 36).

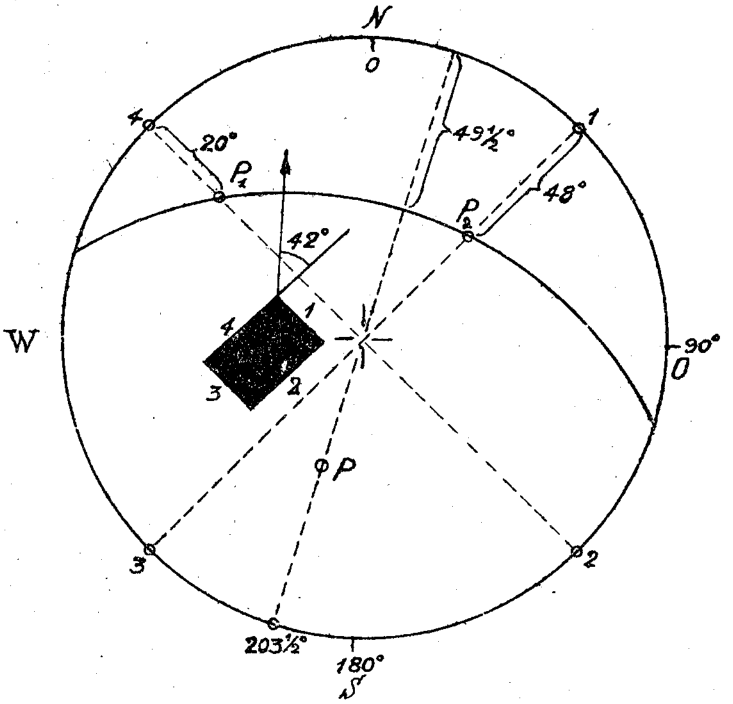
1) Линией простирания называется горизонтальная линия, лежащая в пласте, т.е. диаметр круга проекций PP′ отстоящий от линии падения на 90°. Но у него два конца. Выберем согласно предложения проф. В.И. Баумана, тот, от которого падение будет вправо, т.е. P′, азимут его будет 124° - 90° = 34°.



Черт. 36.

2) Приведем направление 180° на экватор и отсчитаем угол до дуги равный у нас 25°.

З а д а ч а 25. На местности заложена прямоугольная вертикальная шахта, причем направление длинных ее сторон по азимуту NO - 42° (черт.37). Шахта эта пересекла пласт каменного угля. В сечении с короткой стороной пласт падает к ЮВ под углом в 20°. В сечении с длинной стороной шахты пласт угля падает к ЮЗ под углом в 48°.



Черт. 37.

Найти азимут линии падения и угол падения.

Р е ш е н и е: На круге сетки намечаем выходы точек 1, 2, 3 и 4 с координатой φ = 42°, 132°, 222° и 312° (т.е. 42°, 42° + 90°, 42° + 180° и 42° + 270°). Это будут нормали к стенкам шахты (черт.37). В плоскости короткой стороны пласт падает от 4 к 2 под углом в 20°. Значит от нормали к 4 стенке эта линия поднимется на 20°. Находим эту точку P_1; точно также, в длинной стенке линия пересечения стенки с пластом поднимается над нормалью к 1-ой стенке на 48° - наметим ее и обозначим P_2; P_1 и P_2 - два направления, лежащие в искомой плоскости. Проводим эту плоскость, т.е. меридиан через точки P_1 и P_2 и к нему полюс P. Координаты этого полюса $\varphi = 203\frac{1}{2}°$ и $\rho = 49\frac{1}{2}°$ - будут азимутом угла падения и величиной угла падения данного пласта.

З а д а ч а 26. В данной местности находятся две свиты пластов разного возраста: более древняя верхнекаменноугольная падает к NW 304° под углом в 10°. Более молодая, пермокарбоновая, лежит на ней несогласно и падает в другую сторону, именно к NO 23° под углом в 30°. Как лежали пласты более древней свиты, во время отложения верхней свиты, т.е. когда пласты последней были горизонтальны?

Р е ш е н и е. Это задача на вращение (таб. V). Сначала наносим на сетку нормали к пластам, их координаты: для нижней свиты $c(\varphi_1 = 304°, \rho_1 = 60°)$, а для верхней $p(\varphi_2 = 23°, \rho_2 = 30°)$. Затем приведя p на экватор вращаем до совпадения p с центром сетки, т.е. на 30°. Тогда c при этом вращении пойдет по параллели и, пройдя 30°, окажется в c_1 с координатами $c'(\varphi_2' = 286°, \rho_2' = 59°)$. Это и будет положение нижнекаменноугольной свиты в пермокарбоновое время. Отсюда мы, между прочим, можем сделать два вывода: 1) Нижнекаменноугольная свита в пермокарбоновое время была уже дислоцирована и собрана в складки меридионального простирания.

2) Ее древнее простирание - SW 196° - была линия $l'l'$, она при последующих дислокациях была погружена северным концом и приподнята южным (это видно из чертежа, когда проследим вращение нормали из c' в c. Например нижний конец l' придет в l, а новое простирание будет mm). Следовательно, выходы более древних пластов на поверхность надо искать к югу от места обнаружения несогласия. (Данные в задаче взяты из наблюдений инженера-геолога М.С Волкова на северном Урале, обн., N5 и N6 нар. Кажим, у Косого порога).

На этом мы и закончим упражнения на сетке Г.В. Вульфа и познакомимся с теорией линейной проекции, а затем с работой без сетки и с сеткой Белянкина.

ГЛАВА IV. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЕКЦИЙ.

§1. Основные положения о линейных проекциях.

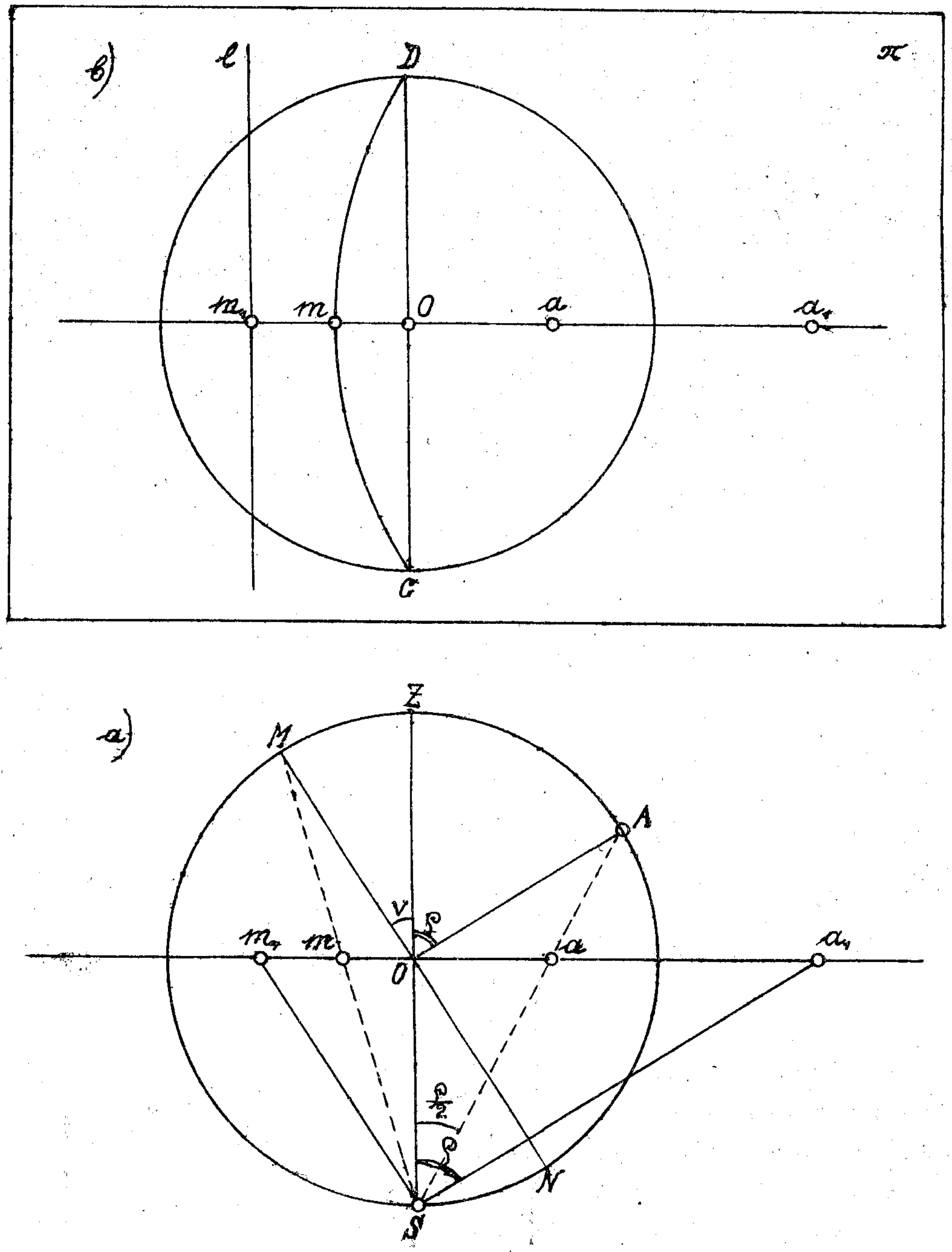
Как известно для получения (см.стр.12) линейной проекции надо к шару радиуса 10 см. провести касательную плоскость λ, а центр пучка расположить в центре шара (черт.4). Таким путем проектируют как граневый кристаллический пучек так и нормалевый. В первом случае проекцию называют собственно л и н е й н о й, а во втором - г н о м о н и ч е с к о й. Но так как и в том и в другом проектируются в сущности одни и те же плоскости и прямые, проходящие через центр шара - то свойство проекции от этого не меняются. В дальнейшем я теоремы буду высказывать так, чтобы их можно было применить к любому пучку, граневому или нормалевому безразлично.

Следующие свойства линейной проекции очевидны: 1. Линейная проекция направления есть точка. Проекция плоскости - линия. Кратчайшее расстояние от точки касания Q ("центра проекции") до линии

$$Lm = OQ.\mathrm{tg}\alpha = R.\mathrm{tg}\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$ см.стр.13

точку m назовем серединой линейной проекции плоскости. Очевидно (свойство кратчайшего расстояния) Qm перпендикулярно ab (черт.4). Когда две плоскости пересекаются по прямой, всегда проходящей через центр шара - (черт. 40) - их проекции пересекаются в точке a_1, являющейся проекцией линии пересечения плоскостей. Если проекции двух направлений (черт.39) Оа и Оb соединить на чертеже прямой, то эта прямая есть изображение проекции плоскости, проходящей через направления Sa и Sb.

Затем отметим следующее. Обычно и линейную и стере-



Черт. 38.

ографическую проекцию чертят на одной и той же плоскости π. Для стереографической проекции центр пучка располагают в центре O шара (черт. 38а), и проектируют из S а для того, чтобы получить на том же чертеже линейную проекцию того же направления, переносят центр пучка в S и в S строят пучек параллельный данному в O. Таким образом пусть имеем направление OA (черт. 38 а) - сечение шара по меридиану в котором лежит OA. Его стереографическая проекция получится в a. Чтобы получить графически линейную проекцию того же направления, из S проводим линию параллельную OA и получаем точку a_1. Как мы знаем $Oa = R.tg\,\alpha/2$, $Oa_1 = R.tg\,\alpha$. Следовательно, если у нас есть шкалы линейная и стереографическая, то можно не строить профиля, а на чертеже (черт. 38 b) приложив к Oa стереографическую шкалу, определить ρ, а отложив ρ' по шкале линейной, найти рточку a_1. Можно и по стереографической шкале отложить 2ρ - придем в ту же точку a_1, так как a_1 можно рассматривать как биссектрису угла 2ρ, т.е как стереографическую проекцию с полярным расстоянием от зенита в $2\rho^\circ$.

Проведем (черт. 38 а) к Sa_1 в точке S перпендикулярную плоскость, которая будет перпендикулярна к плоскости SZa_1 и пересечет ее по линии Sm_1 как выяснено выше. m_1 - будет середина линейной проекции плоскости. Проекция плоскости будет прямая перпендикулярная к m_1a_1 (см. выше), т.е. m_1l. Эта прямая будет г н о м о н и ч е с к а я проекция направления Sa_1, или что все равно, направления OA. Для получения ее, следовательно, нужно сделать г н о м о к о р р е л я ц и ю и спроектировать линейно.

Если через O проведем плоскость перпендикулярную к OA, она пересечет плоскость меридиана по диаметру M_1N_1 и эту плоскость спроектируем стереографически, получим как известно, дугу круга DmC. Плоскость эта параллельная плоскости Sm, следовательно линия ее пересечения с плоскостью чертежа π - CD будет параллельна m_1l - $CD \parallel m_1l$ а следовательно CD перпендикулярна к m_1a_1. Впрочем, перпендикулярность CD к линии m_1a_1 ясна из того, что CD

есть линия пересечения двух плоскостей MN и $\mathcal{R}$ - перпендикулярных к плоскости ZSA, следовательно CD перпендикулярна к плоскости ZSA и поэтому CD как нормаль к плоскости ZSA, перпендикулярна ко всякой линии, лежащей в этой плоскости, в том числе и к $m_1 a_1$. Следовательно, CD перпендикулярна к $m_1 a_1$.

Дугу DmC мы получили из направления OA сделав гномокорреляцию, а затем проектируя стереографически. Поэтому эту дугу называют гномостереографической проекцией направления OA.

Если бы за исходный образ взяли грань (плоскость) перпендикулярную к OA, то:

1) Дуга DmC была бы стереографической (или "грамма - стереографической") ее проекцией.

2) прямая $m_1 l$ - линейной

3) точка a_1 - гномонической и

4) точка a - гномостереографической проекцией.

Следствия:

1) Лучи OA, Sa_1, и линии OM и Sm_1 все лежат в плоскости меридиана ZSA, а их проекции a, a_1, m и m_1 на прямой $m_1 a_1$ перпендикулярной к CD и к $m_1 l$.

2) Гномокорреляции всегда лежат на этой прямой по другую сторону от центра, чем линейная и стереографическая (так как угол $\angle AOM = 90^\circ$, то M будет всегда по другую сторону от Z, чем A; и так как $\angle a_1 S m_1 = 90^\circ$, то m_1 будет всегда по другую сторону от O чем a_1).

3) Стереографические проекции a и m всегда ближе к центру, чем линейные.

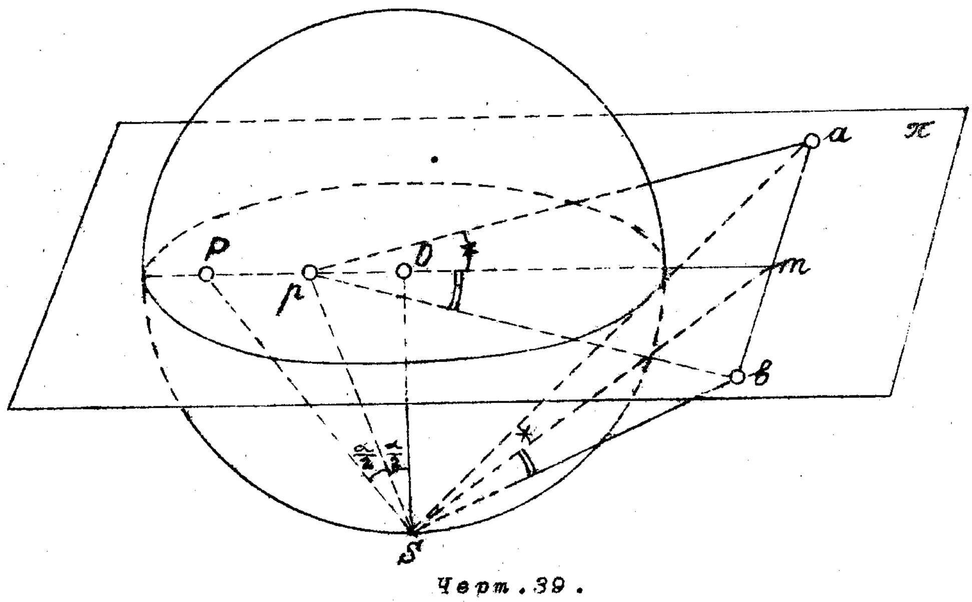
4) Стереографическую проекцию всегда можно рассматривать, как линейную с вдвое меньшим углом наклона к оси. Линейную - как стереографическую с вдвое большим углом наклона к оси.

Теорема V. Гномоническая проекция плоскости есть геометрический центр окружности, изображающей стереографическую проекцию той же плоскости.

Пусть (черт. 38 a и b) дуга DmC есть стереографичекая проекция плоскости MN. Тогда a_1 есть гномоническая проекция этой плоскости. Если склонение плоскости = полярному расстоянию точки $M = V^\circ$, то, как мы знаем, для нахождения центра надо к диаметру CD провести перпендикуляр в O, т.е. Oa_1, найти угол $90^\circ - V = \rho$ и отложить от O – $R.tg\rho$ (см.стр. 30 формулу 9). Но расстояние $Oa_1 = R.tg\rho$, следовательно, мы придем в точку a_1, что и требовалось доказать.

§2. Теоремы об углах в линейных проекциях.

Т е о р е м а VI. Чтобы построить на чертеже истинный угол между направлениями Sa и Sb (черт.39), ли-



Черт.39.

нейные проекции коих a и b – даны, надо: Провести прямую ab и восстановить перпендикуляр Om; измерив Om по линейной шкале, найти склонение плоскости Sab β°. Найти дополнение $\gamma = 90^\circ - \beta$ и отложить по стереографической шкале в другую сторону от центра на линии Om расстояние $Op = R.tg \frac{\gamma}{2}$. Точку p (очевидно, являющуюся гномостереографической проекцией плоскости Sab) соединить с a и b. Угол apb будет равен aSb.

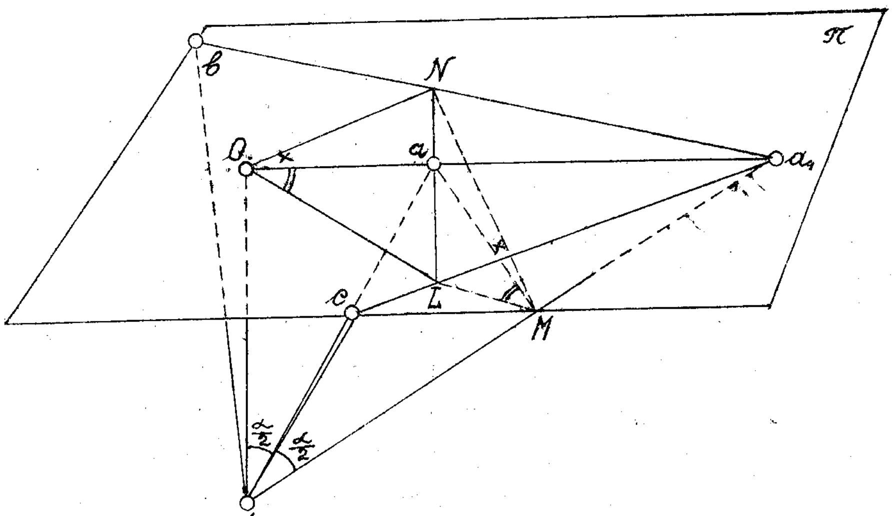
Д о к а з а т е л ь с т в о. (см.черт.39). $ab \perp Om$ по построению, $amO = bmO = 90°$. $SO \perp \pi$ и, следовательно $SO \perp ab$, следовательно и плоскость $SOm \perp ab$, а поэтому углы bmS и amS прямые и - плоскость SOm перпендикулярна плоскости Sab.

Чтобы найти точку p построением, к плоскости Sab восставляем перпендикуляр P, для чего в плоскости SOm к линии Sm восставляем перпендикуляр SP, а угол PSO делим пополам биссектрисой Sp. В треугольнике mpS углы при pS равны между собой. В самом деле, угол $OpS = 90 - \frac{\alpha}{2}$ (из прямоугольного треугольника pOS), а угол pSm = $= PSm - \frac{\alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$, следовательно $\angle pSm = \angle Spm$; отсюда:

$$pm = Sm \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Далее $\Delta pma = \Delta Sma$ (катет am общий, а $pm = Sm$) и $\Delta\ pmb = \Delta Smb$ (катет bm общий, и $pm = Sm$), следовательно $pa = Sa$ и $pb = Sb$. А значит $\Delta\ pab = \Delta Sab$ (по трем сторонам). Отсюда и следует что $\angle apb = \angle aSb$.

Т е о р е м а VII. Чтобы построить на чертеже истинный угол между двумя плоскостями, линейные проек -



Черт.40.

ции которых a_1b и a_1c даны (черт.40), нужно: Точку пересечения проекций a_1 соединить с центром O и найти по линейной шкале угол наклона α ; затем, от O отложить на линии Oa по стереографической шкале (т.е. построить стереографическую проекций a направления Sa_1); в точке a восстановить перпендикуляр к Oa_1 – и точки пересечения этого перпендикуляра N и L соединить с O. Тогда угол NOL искомый.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Сначала построим линейный угол двугранного $b\,S\,a_1 c$. Для этого из a опустим в плоскости SOa_1 перпендикуляр на Sa_1 – в точке M и N и L соединим с M. Угол NML будет линейный двугранного, так как $NL \perp Oa_1$ и $\perp SO$, следовательно $NL \perp$ плоскости SOa_1 следовательно $NL \perp Sa_1$; значит, и $Sa_1 \perp NL$ и aM, следовательно и $Sa_1 \perp$ плоскости NLM. $\Delta SOa = \Delta SMa$, так как оба прямоугольны, гипотенуза общая и острые углы равны. Следовательно:

$$Oa = aM \quad . . . . (15)$$

Далее $\Delta OaN = \Delta MaN$ и $\Delta OaL = \Delta MaL$ (по двум катетам), следовательно $\angle NOa = \angle NMa$ и $\angle LOa = \angle LMa$; сложив, получаем $\angle NOL = \angle NML$, что и требовалось доказать.

§3. Пример гномонического проектирования.

Для примера разберем одну задачу.

З а д а ч а 27. Кристалл барит* измерен на теодолитном гониометре. Координаты нормалевого пучка даны в таблице.

N N граней	Индексы	Координаты	
		φ	ρ
1	(100)	0	0
2	$(\bar{1}01)$	0	$39°10'$
3	(110)	$90°$	$39°10'$
4	$(10\bar{1})$	$180°$	$39°10'$
5	$(1\bar{1}0)$	$270°$	$39°10'$

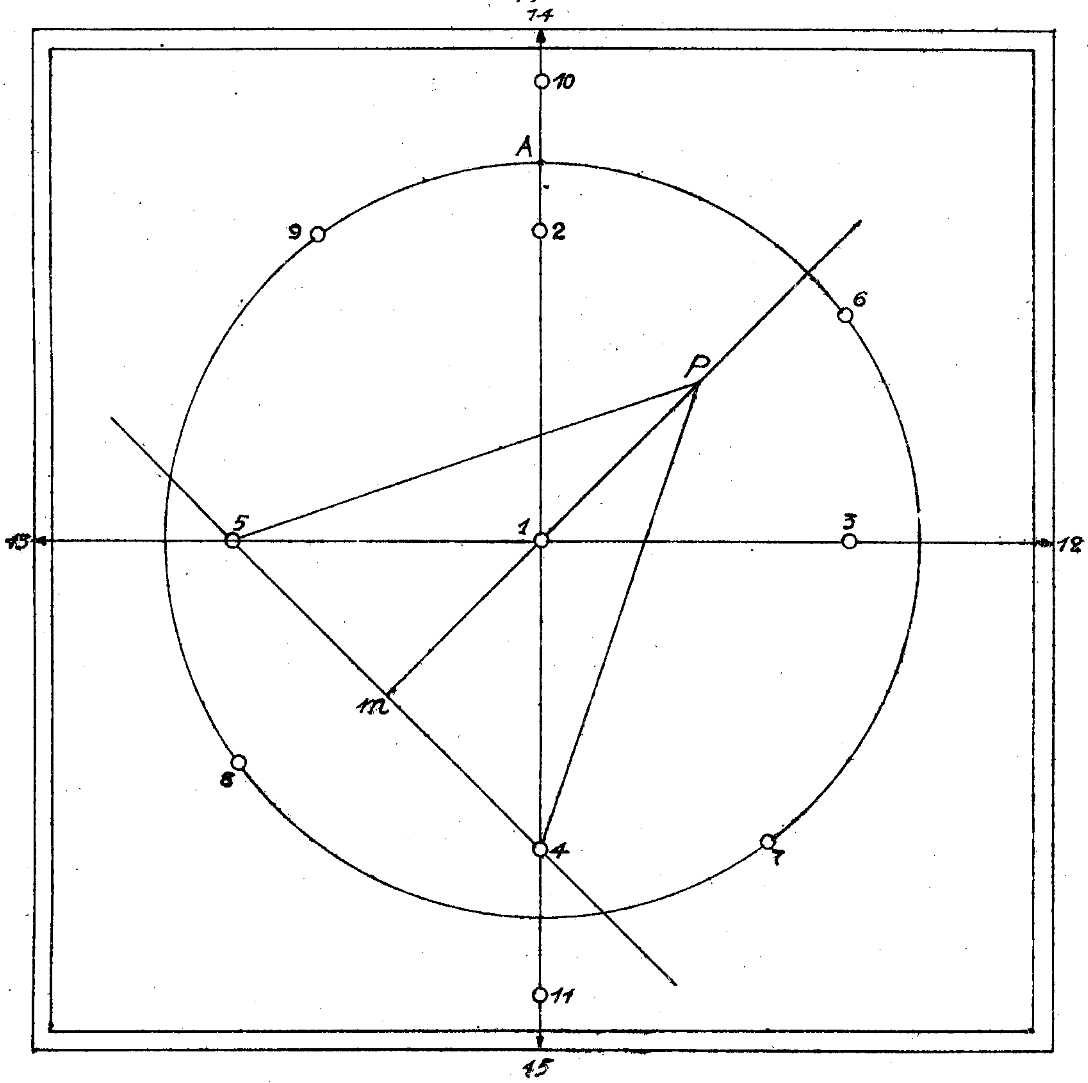
*Данные с некоторыми округлениями, взяты из работы: Л.А. Стрекслова о кристаллах барита из окрестностей Феодосии. Изв. А.Н. 1915. стр. 229.

N N граней	Индексы	Координаты	
		φ	ρ
6	(111)	52° 43′	45° 40′
7	$(11\bar{1})$	142° 43′	45° 40′
8	$(1\bar{1}1)$	232° 43′	45° 40′
9	$(\bar{1}11)$	322° 43′	45° 40′
10	(102)	0°	51° 8′
11	$(10\bar{2})$	180°	51° 8′
12	(010)	90°	90°
13	$(0\bar{1}0)$	270°	90°
14	(001)	0°	90°
15	$(00\bar{1})$	180°	90°

Построить гномоническую проекцию граней этого кристалла (т.е.линейную нормалевого пучка).

Р е ш е н и е (см.черт.41).Проводим две взаимно - перпендикулярные линии и из точки их пересечения проводим окружность R = 5 см.Центр пучка будем воображать под чертежом на расстоянии 5 см.Тогда проведенная окружность явится геометрическим местом направлений, наклоненных к оси под 45°.Грань 1 расположим в центре.Направление φ = 0° будем считать вверх.Грань 2 тогда должна лежать на луче 1-10,по которому мы,пользуясь линейной шкалой при R = 5 см.(черт.7) отложим ∠39°10′ и получим точку 2.Грани 3,4 и 5 имеют тот же ρ и найдутся засечкой на взаимно перпендикулярных линиях.Для построения грани 6,отложим от A по транспортиру $\varphi = 52\frac{3}{4}°$, и по лучу от центра $45\frac{3}{4}°$ и получим точку 6,чуть вне круга.Также построим 7,8 и 9.Грань 10 опять найдется на луче CA,где отложим по линейной шкале tg 51°;аналогично построим и грань 11.Грани 12,13,14 и 15 лежат в бесконечности и по их азимуту поставлены лишь стрелки.Рамка проведена произвольно,так,чтобы поместились все найденные грани.

Пусть теперь нам надо найти угол,который составляет в пространстве нормали к граням 5 и 4.Для этого (теорема VI) соединяем точки 5 и 4 прямой, восставляем к ней из центра перпендикуляр 1m и меряем линейной шкалой



Черт.41.

угол 1m - он равен 29°. Дополнение 90 - 29 = 61° и откладываем в другую сторону $1p = R.tg\,\frac{61^\circ}{2}$, где найдем точку p. Соединим p с 5 и 4 и угол 5p4 измеряем транспортиром. Он равен 53°.

ГЛАВА V. РАБОТА БЕЗ СЕТКИ И НА ПОЛЯРНЫХ СЕТКАХ.

§1. Вычерчивание стереографических проекций.

Перейдем к решению задач по стереографическим проекциям без сетки или на сетке Белянкина и Федорова. Напомню, чем отличается работа при этих условиях: 1) Черчение производится на самой сетке или на чистом листе бумаги. 2) Необходимо употреблять не только линейку, циркуль и транспортир, если работают на чистой бумаге, но еще и другие вспомогательные приборы: шкалы, линейную и стереографическую и линейку для пологих дуг, или заменяющий ее угловой циркуль Болдырева. Другие вспомогательные приборы - треножный циркуль, трафарет Пенфильда - не необходимы.

Дадим краткое описание этих приборов. Обыкновенная линейка должна быть длиной не менее 20 см., лучше см. 25-30. Циркуль также должен давать раствор не менее 20 см. Из транспортиров удобнее всего целлулоидные на полную окружность с делениями от 0 до 360°. Откладывание на чертеже проекций делений, которые отвечали бы равномерным градусным промежуткам на шаре, требует, как мы знаем, применения стереографической шкалы. Ее можно построить на полоске плотной бумаги (на ватмане) как объяснено ранее (стр. 15) и пользоваться ей, как обыкновенным масштабом.

Е.С. Федоровым сконструирована металлическая линейка ("стереографическая линейка Е.С. Федорова") на которой точно (делительной машиной) нанесены с одной стороны стереографические деления до 143°, а с другой равномерные деления в 200 мм (диаметр круга проекций) и далее шкала sec для нахождения центров параллелей по формуле (11).

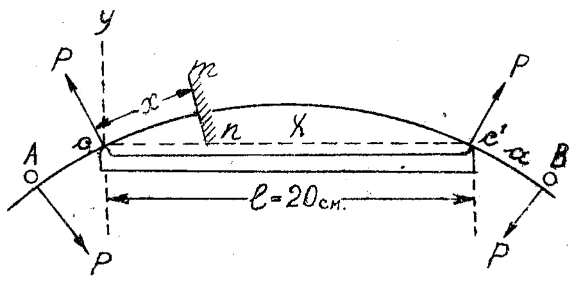
На стереографическом чертеже приходится проводить окружности и отрезки окружностей как большой, так и малой кривизны*. Последние не могут быть проведены при помощи циркуля и поэтому приходится их или чертить от руки или прибегать к особым приборам. Из последних опишем два – линейку для пологих дуг Е.С.Федорова, основанную на механическом принципе, и угловой циркуль А.К.Болдырева, основанный на теореме о вписанных углах.

Если мы имеем упругую пластинку АВ (черт.42) в точках А и В нагруженную равными силами РР и опирающуюся на две симметричные опоры С и С', то как доказывается в сопротивлении материалов, пластинка изогнется в средней части СС' по дуге окружности.

Уравнение упругой линии таково:

$$\frac{M_u}{E.I} = \frac{1}{r}$$

где M_u – изгибающий момент для какого либо сечения mn (черт.42); E – модуль упругости вещества пластинки; I – момент инерции. На чер.42 CX и CY – оси координат. Для данного случая (консольная балка с симметрично расположенными равными нагрузками P, P, P, P). Изгибающий момент M_u равен:



Черт.42.

$$M_u = -P(a + x) + Px = -Pa$$

где а – постоянная величина-расстояние между точками нажима с и с' до точек опоры А и В. а = Ас = Вс. Следовательно М – const.

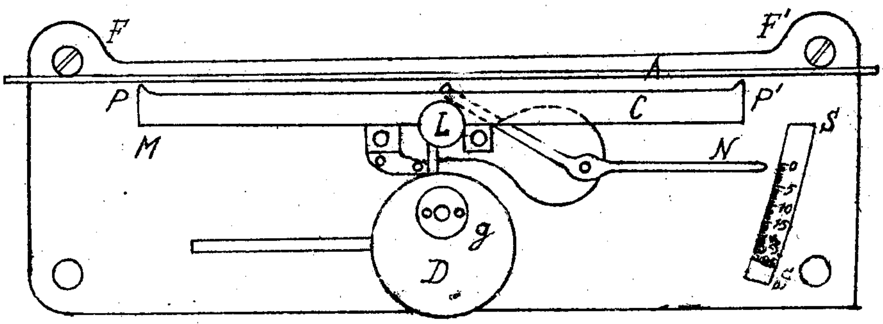
А так как для пластинки с постоянным сечением I по

---

*Кривизной окружности в математике называют величину $\eta = \frac{1}{R} = \frac{\varphi}{S}$ где φ – угловая мера отрезка дуги, а S – длина этого отрезка [черт.44]. Кривизна прямой линии равна $\eta_0 = \frac{1}{\infty} = 0$.

стоянно и E постоянно, то $\frac{M}{E.I} = \frac{1}{r} = const$, следовательно, r-радиус кривой $ACC'B$ - величина постоянная, и кривая есть окружность.

Конструкция линейки такова (черт.43): стальная пла-



Черт.43.

стинка A изгибается нажимом бруска C, упирающегося в пластинку в двух точках p и p'. Расстояние pp' равно диаметру круга проекций, т.е. 20 см. Изгиб производится посредством эксцентрика D. Стрелка N показывает склонение прочерчиваемой дуги (см. ниже). При черчении пологих дуг этим прибором (когда склонение $\nu \leq 20^{\circ}$), изгибаем стальную пластинку до нужной кривизны и прочерчиваем дугу карандашом (или рейсфедером) как по лекалу, не особенно крепко прижимая карандаш, чтобы не создать встречного прогиба пластинки.

Дуги больших кругов в стереографической проекции опираются на диаметр круга проекций AB постоянной длины - 20 см (черт.44). Этот диаметр по отношению к окружностям AM_1B_1; AM_2B; AM_3B; AM_4B и т.д. является хордой постоянной длины. Если в такой отрезок дуги впишем тупой угол AM_1B, который по известному свойству вписанных углов измеряется половиной внешней части дуги окружности $AK...B$, и сторону BM_1 продолжим, то получим угол CM_1A равный $180^{\circ} - \angle AM_1B$. Напишем равенство:

$$CM_1A = \varphi = 180^{\circ} - \angle AM_1B = 180^{\circ} - \frac{\smile AK...B}{2} = \frac{360^{\circ} - \smile AK...B}{2}$$

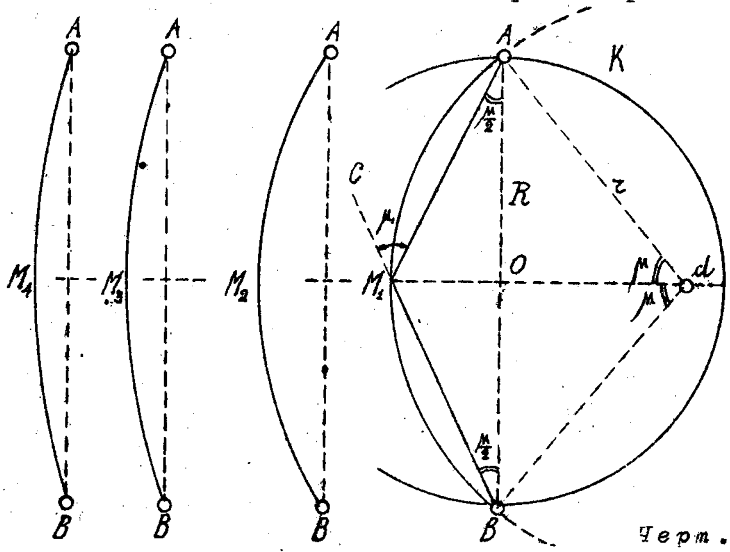
Но дуга $360^{\circ} - \smile AK...B = \smile AM_1B$, следовательно:

$$\mu = \frac{\smile AM_1B}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Если d есть центр окружности ВАК, то центральный угол $AdB = 2\mu$, а $\angle AdM_1 = \angle BdM_1 = \mu$. Из прямоугольного треугольника AOd

$$\frac{R}{r} = \operatorname{Sin}\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Отношение $\frac{R}{r}$ можно представить в виде $\frac{R}{r} = \frac{1}{r} : \frac{1}{R}$. Но $\frac{1}{r}$ - это кривизна круга ВАК (см. примечание на стр. 71), а $\frac{1}{R}$ - кривизна шара проекций, поэтому отношение $\frac{1}{r} : \frac{1}{R}$ это есть отношение кривизны круга ВАК и шара проекций, т.е. **о т н о с и т е л ь н а я   к р и в и з н а** круга ВАК - обозначим ее η_0. Тогда:



Черт.44.

$$\eta_0 = \frac{1}{r} : \frac{1}{R} = \operatorname{Sin}\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Так как η_0 находится в прямой зависимости от μ, то μ я буду называть **у г л о м   к р и в и з н ы** данной дуги. Он показывает всегда сколько градусов содержится в половине дуги, AM_1B - т.е. в дуге AM_1. Очевидно, μ будет малым для пологих дуг (для прямой он $0°$) и для круга проекций он равен $90°$; в это время относительная кривизна η_0 изменятся от 0 до наибольшей величины

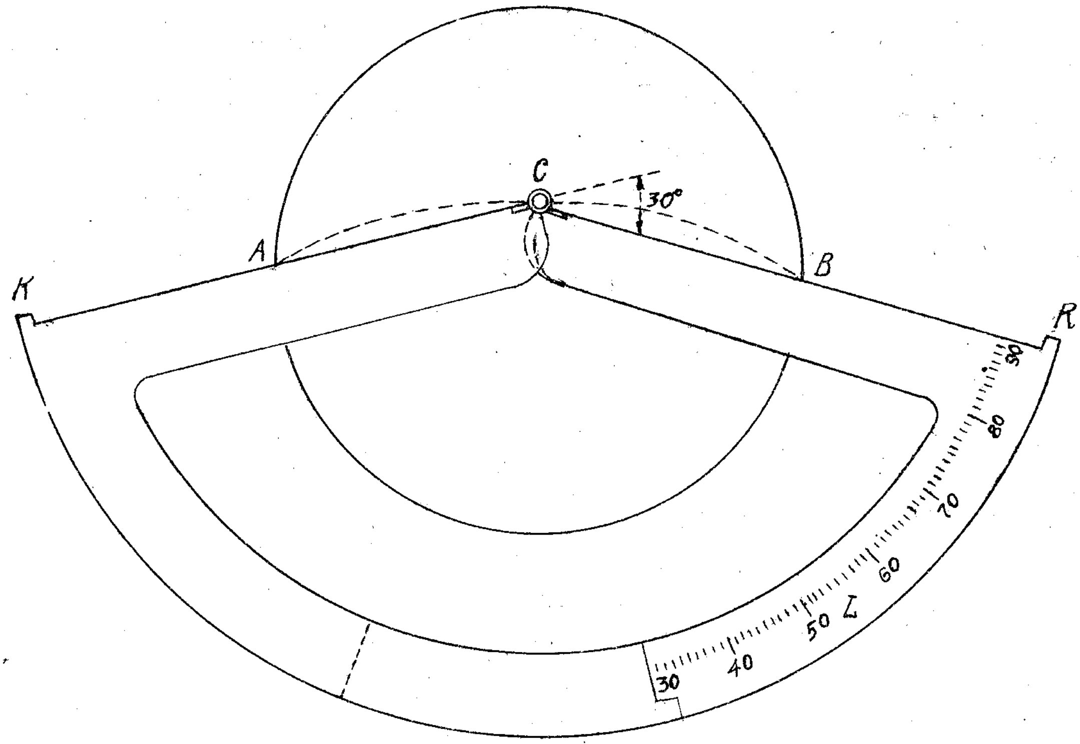
$$\eta_{max} = \operatorname{Sin} 90° = 1$$

Возьмем дугу AM_1B и в ее средней точке M_1 опустим перпендикуляр к AB, который очевидно попадет в цэнтр круга проекций. Так как треугольник AM_1B равнобедренный то $\angle M_1BO = \varphi/2$, а $M_1O : R = tg\ \varphi/2$, откуда $M_1O = R.tg\varphi/2$. Но мы знаем, что $OM_1 = R.tg\,\rho/2$, где ρ - есть полярное расстояние точки M_1. Отсюда $\varphi = \rho$ и мы можем высказать теорему:

Т е о р е м а VIII. Чтобы определить угол к р и в и з н ы дуги большого круга, надо прочесть полярное расстояние средней точки дуги.

На линейке для пологих дуг Е.С.Федорова стрелка N (черт.44) сразу указывает угол кривизны прочерчиваемой дуги.

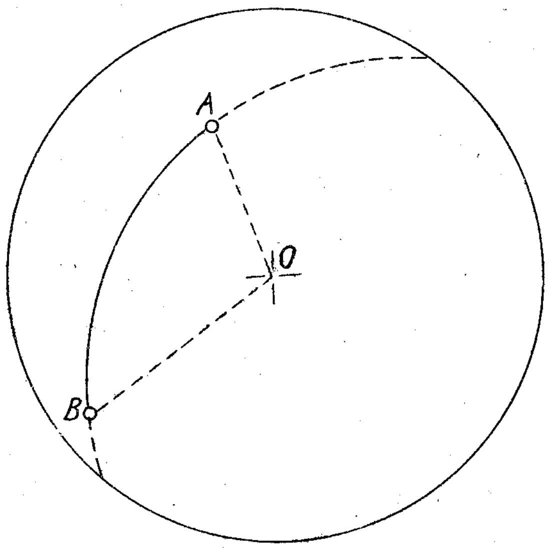
Очевидно, в какой бы точке дуги AM_1B мы ни построили угол, опирающийся на хорду AB, он будет один и тот же. На этом основан угловой циркуль А.К.Болдырева. Одна из конструкций его изображена на черт.45. Две стороны угла



Черт.45.

K и R снабжены ведущими дугами и могут сдвигаться до угла $KCR_1 = 90^\circ$ и раздвигаться до прямой линии $KCR_2 = 0$. В точке C в отверстии укрепляется карандаш. На дуге нанесены деления, отвечающие кривизне прочерчиваемых дуг.

Чтобы начертить дугу этим прибором, поступаем следующим образом (черт.45). На круге проекций в точках A и B укрепляем булавки; в C вставляем карандаш и раздвигаем стороны так, чтобы угол KCR отвечал кривизне прочерчиваемой дуги, что определяется по шкале L. Далее, касаясь сторонами угла KC и RC булавок плавно проводим дугу от A к B.



Черт.46.

Т р а ф а р е т П е н ф и л ь д а представляет собой, половину сетки Вульфа, нанесенную на целлулоиде. В центре у него есть дырочка для укрепления в центре чертежа при помощи булавки. Он служит для определения угла между двумя точками в проекциях. Для этого на точки наводится меридиан трафарета и по параллелям отсчитывается число градусов. С ним многие задачи решаются проще.

Т р е н о г и й ц и р к у л ь представляет собой т р и шарнирно соединенные острия, из которых одно может укорачиваться и удлиняться. Он служит для г р у б о г о определения угла между двумя точками на сетке. Когда при работе на сетке Вульфа (зад.№4) мы восковку вращаем около O до тех пор пока точки A и B не придут на один меридиан, мы, в сущности, вращаем сферический треугольник ABO около центра O (черт.40).

То же мы можем проделать и треногим циркулем. Поместив его ножки в O, A и B - з а к р е п л я е м и х.

Затем, не изменяя их взаимных расстояний, переносим циркуль на какую либо сеть меридианов: сетку Федорова, Вульфа, трафарет Пенфильда и поставив центральную ножку в О две остальные приводим на один меридиан, где и отсчитываем градусы по числу промежуточных параллелей.

§2. Основные задачи.

Мы будем рассматривать теперь решение задач по стереографическим проекциям, считая, что имеется одна из следующих комбинаций инструментов (не считая линейки и циркуля):

1. Первый набор приборов: 1) карандаш, 2) линейка в 25 см., 3) циркуль, 4) транспортир, 5) линейка для пологих дуг Е.С. Федорова или угловой циркуль Болдырева, 6) шкалы стереографическая и линейная.

II. Второй набор приборов: те же, что и в первом, только шкалы стереографическая и линейная отсутствуют.

III. Третий набор приборов: те же, что и в первом, кроме того 7) стереографическая сетка Белянкина или Федорова, транспортир может отсутствовать.

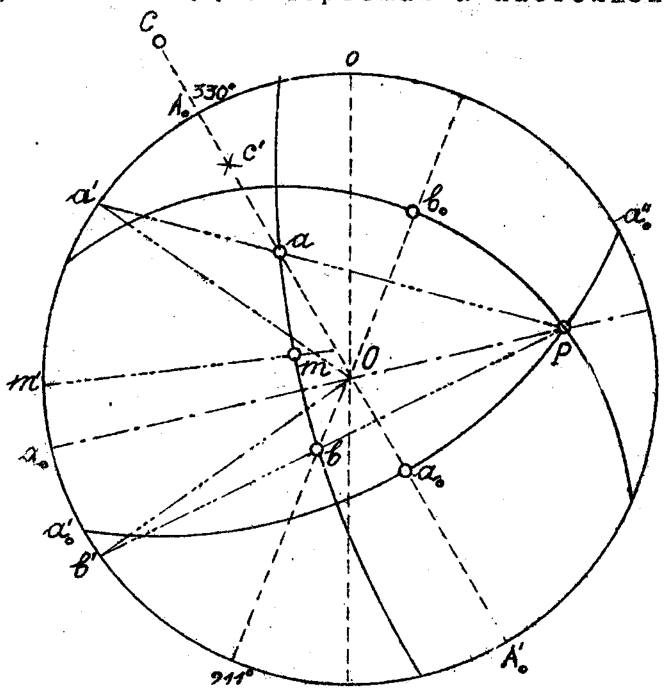
I и II случай мы будем кратко называть "работа без сетки". III случай - "работа на сетке". Из перечня приборов и из описания видно, что при стереографическом черчении совершенно необходимым прибором является кроме обычных циркуля и линейки, линейка для пологих дуг, или же угловой циркуль.

Здесь полезно сказать несколько слов о сетке Е. С. Федорова (таб. VIII). Она представляет собой центральную сетку через 5° как в сетке А.С. Белянкина, и кроме того, наложенные на тот же чертеж две меридиональные сетки, с меридианами через 10° и с параллелями через 5°; оси этих вспомогательных сетей между собой перпендикулярны: одна совпадает с меридианом 0 - 180°, а другая с 90° - 270°.

Большинство задач на сетке Федорова решается так же,как и на более простой А.С.Белянкина.Только в задачах на вращение присутствие вспомогательных осей облегчает решение.

З а д а ч а 28. Даны координаты точек в центральной системе $A(330^\circ,50^\circ)$,$B(211^\circ,30^\circ)$,$C(330^\circ,105^\circ)$. Построить стереографические проекции этих точек.

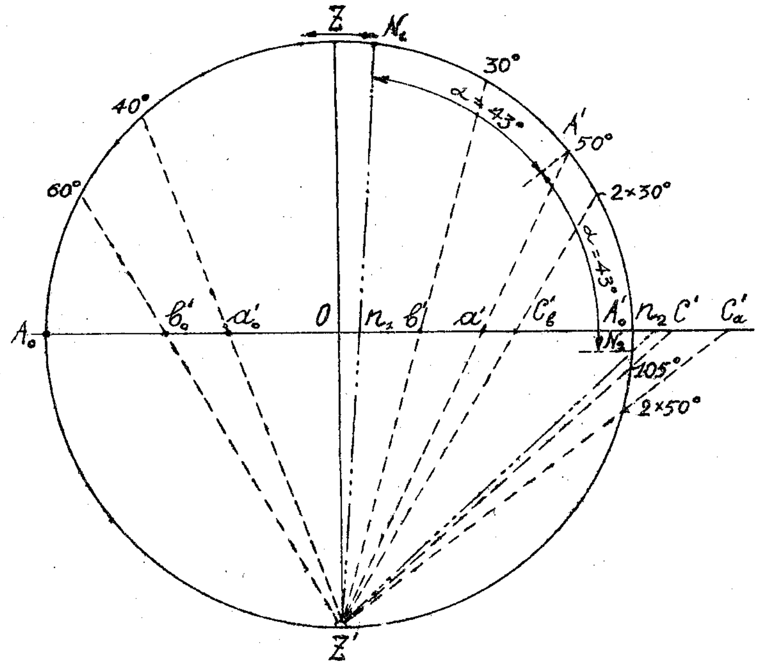
Работа с первым набором (черт.47).Чертим круг проекций радиуса шара,т.е.10 см.(На чертежах к настоящему руководству для экономии места все чертежи выполнены для шара $R = 3\frac{1}{2}-4$ см. Вверху круга намечаем нулевую точку.По транспортиру откладываем $\varphi = 330^\circ$ по часовой стрелке и прочерчиваем меридиан OA_0.По стереографической линейке от центра откладываем $\rho = 50^\circ$ и



Черт.47.

округляем точку.Также строим точку В.Точка С имеет $\rho_3 = 105^\circ$,т.е.лежит ниже экватора.Если ее хотим получить в той же проекции,то нужно отложить по линейке 105° точка очевидно будет лежать вне круга проекций. Но можно прибегнуть и к перемене точек зрения и тогда,очевидно, надо из центра отложить по меридиану в $330^\circ - 105^\circ$ так: сначала 90° до окружности,а избыток $(105^\circ - 90^\circ) = 15^\circ$ от края к центру и точку C' отметить крестиком.

II.Если нет стереографической линейки,то ρ можно построить.для этого на отдельном чертеже (черт.48) чертим профиль шара по какому либо меридину,т.е.круг радиуса 10 см. Плоскость чертежа изобразится линией A_0OA_0'. зенит - Z, точки зрения в Z'. От зенита влево или вправо по окружности откладываем $\rho_1 = 50°$ и $\rho_2 = 30°$ и $\rho_3 = 105°$, соединяем полученные точки с Z' и лучи продолжаем до пересечения с прямой A_0O или ее продолжением. Получатся точки a', b' и c', которые, как мы знаем, отстоят от центра на $R.tg\frac{\rho}{2}$, т.е. мы отложили геометрически проекции дуги ρ. Остается только циркулем перенести их на план (черт.47) и получить точки a, b и c.



Черт.48.

III. На сетке все это упрощается (таб. VI), так как ни транспортира ни стереографической шкалы не надо. По кругу сетки по часовой стрелке находим нужный меридиан, а по нему от центра отсчитываем ρ (доли 5° на глаз). Линейка потребуется лишь для нахождения точки C, лежащей вне круга, если не воспользоваться переменой точек зрения.

З а д а ч а 29. Дана точка A (330°, 50°). Найти нормальную к ней дугу (черт.47). Также для B (211°, 30°).

I. Проводим меридиан A_0A_0'. Проводим к нему перпендикуляр, представляющий очевидно линию пересечения нормальной плоскости с кругом проекций. Его концы a_0' и a_0'' с долготой 60° и 240° принадлежат проекции нормальной дуги. Третью точку найдем в плоскости меридиана точки A. Для этого от a к центру отложим $90^\circ:50^\circ$ до центра уже есть а 40° по стереографической шкале. Получим точку a_o. Три точки дуги имеем. Также найдем три точки b'_o, b_o и b''_o для дуги, нормальной к направлению OB. Угол кривизны дуги $a''_o a_o a'_o = 40^\circ$, а дуги $b'_o b_o b''_o = 60^\circ$ и их нужно чертить циркулем. Для этого сначала найдем геометрические центры этих дуг; рассмотрим например, это для дуги $b'_o b_o b''_o$. По правилу на стр. 30 следует от O в сторону точки B отложить $tg\,\rho$, т.е. воспользоваться линейной шкалой (или отложить 2ρ по стереографической шкале - из способа построения шкал (стр.15-16) известно, что это равносильно одно другому). Так получим точки C_b и C_a, куда поставим ножку циркуля и рпрочертим дуги $b'_o b_o b''_o$ и $a''_o a_o a'_o$.

II. Точки $a''_o a'_o$ $b'_o b''_o$ находятся по предыдушему. Точки a_o и b_o и C найдем построением (черт.48). Строим профиль; от полюса Z откладываем влево кривизну дуги, т.е. 60° и 40° точки соединяем с Z' и находим a_o и b_o, которые переносим на чертеж. Для нахождения центра C_{bo} надо от Z отложить $2\rho = 60^\circ$, и спроектировать его на диаметр, получим точку C'_{bo} которую и переносим на чертеж на линию OB.

III. На сетке (таб. VI) построение упрощается. Во первых (считая, что сами точки a и b уже нанесены) наносим точки a'_o и a''_o (отсчитывая по кругу проекций 90° в обе стороны от A_o) и b'_o, b''_o отсчитывая 90° от B_o. Также отсчитываем от a к центру 90° по стереографической шкале, по меридиану A_oO и найдем точку a_o, а от B_o к центру по линии B_oOB_o - отсчитав 90° - получим b_o.

Для дуги $a''_o a_o a'_o$ как и для дуги $b'_o b_o b''_o$ найдем положение центра. Для этого от центра O по направлению OB_o отложим по меридиану сетки $2\rho = 60^\circ$ и найдем точку C_{bo}.

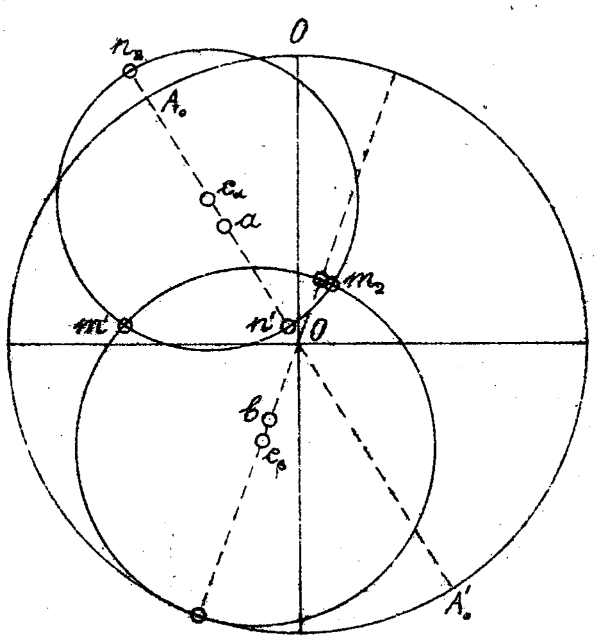
З а д а ч а 30. Даны две точки A и B /(черт.47). Провести через них дугу большого круга (также таб. V).

К точкам A и B рпроводим нормальные дуги, как это об'яснено в предыдушей задаче. Пересечение этих дуг определит точку P, которая будет отстоять от A и B на 90°. Следовательно, если теперь, принимая P за полюс провести нормальную дугу, то она обязательно пройдет через A и B.

Задача 31. Дана точка $A(330°, 50°)$. Найти геометрическое место точек, отстоящих от A на $\angle\alpha = 43°$ (черт. 49).

Мы уже знаем, что это будет малый круг со сферическим радиусом в $\alpha°$. Дадим решение этой задачи применительно к наборам.

II. Точка A у нас нанесена на чертеже (а). Строим профиль по меридиану $A_0 A_0'$ (черт. 48). По нем по транспортиру от луча OA откладываем в обе стороны сферический радиус и полученные точки N_1 и N_2 проектируем из Z' получим n_1 и n_2. Так как центр искомого малого круга находится в плоскости меридиана $A_0 Z A_0$ (следствие из теоремы III стр. 26) то точки n_1 и n_2 будут концами диаметра. Переносим их на чертеж 49 делим отрезок $n_1 n_2$ пополам и из полученной точки C_α описываем круг радиусом $C_\alpha n_1 = C_\alpha n_2$, который и будет искомый.



Черт. 49

I. При наличии стереографической шкалы, все построения черт. 48 не нужны. По диаметру O_a в обе стороны от a откладываем по 43° получим точки n_1 и n_2. Отрезок $n_1 n_2$ делим (черт. 49) пополам и из точки C_α очерчиваем круг.

III. Здесь решение то же самое (таб. VI): от точки a по стереографической шкале на диаметре Oa откладываем в обе стороны по 43°, получаем точки a'' и a'''. Отрезок $a'' a'''$

делим пополам (для чего можно воспользоваться миллиметровой шкалой стереографической линейки Е.С.Федорова), из точки O_α описываем окружность радиусом $O_\alpha a'' = O_\alpha a''$

З а д а ч а 32. Найти точку M, отстоящую от данной A на $\alpha = 43^\circ$, а от данной B – на $\beta = 60^\circ$ (таб. VI). Точки A и B нанесены на сетку в виде проекций a и b.

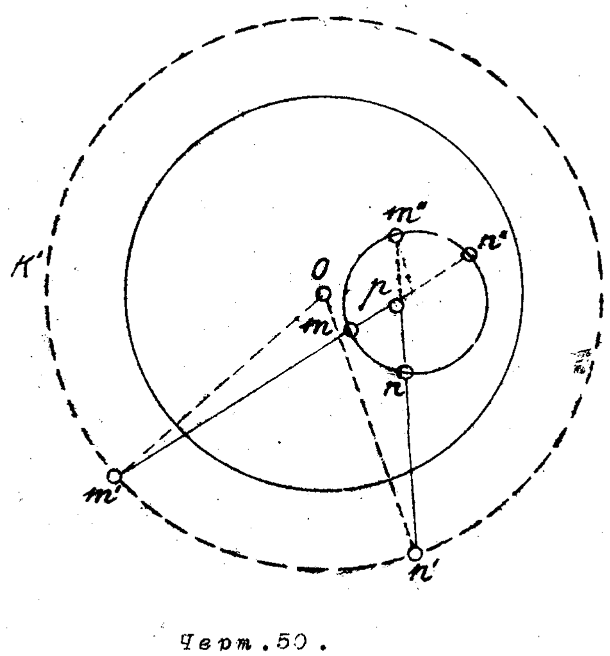
III. На диаметре Oa, от точки a в обе стороны откладываем по стереографической шкале по α°, полученный отрезок $a'' a'''$ делим пополам и прочерчиваем окружности малого круга; также находим окружность радиуса β° около B(b). Точки пересечения этих кругов m_1 и m_2 (в общем случае две) удовлетворяют требованиям задачи.

Чтобы научиться измерять углы между направлениями, нам нужно доказать следующую теорему:

Т е о р е м а IX. Пусть дана стереографическая проекция mn дуги M_0N_0 малого круга K_0 и p – проекция ее полюса P (черт.50 и 51). Вокруг центра O проекций описываем окружность k радиусом $tg\frac{180-\rho}{2}$ где ρ – есть сферический радиус окружности K_0, который следовательно, должен быть известен. Продолжив pm и pn до пересечения с окружностью K' в m' и n' докажем, что:

$\smile M_0N_0 = \smile m'n' = \angle m'On'$

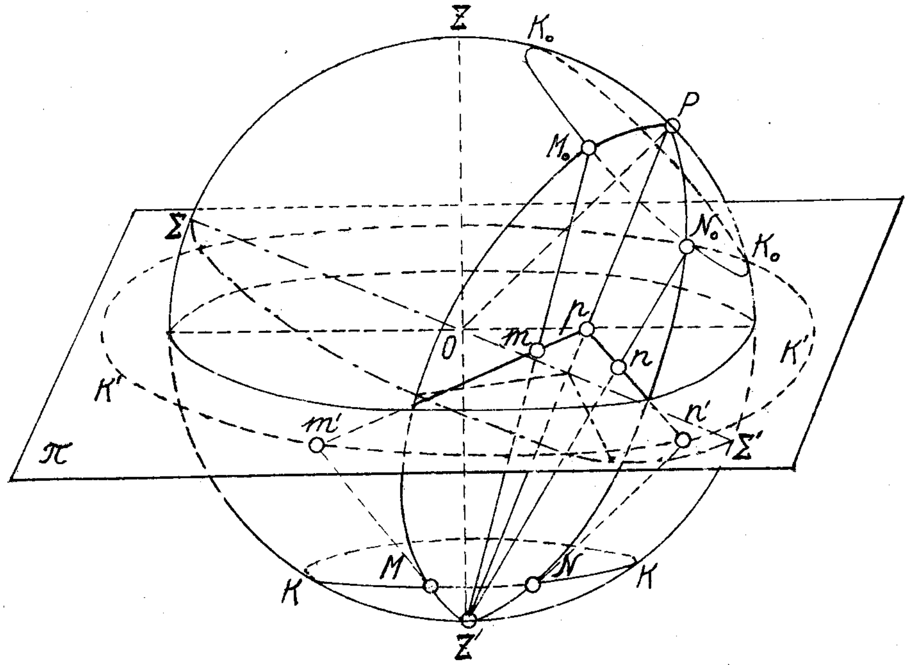
Доказательство* (см. черт.50). Окружность K' есть проекция такой окружности K, которой полярное расстояние $ZK = 180^\circ - \rho^\circ$, следовательно дуга $Z'K = \rho^\circ$ и окружность KK мы получим,



Черт.50.

*Теорема и доказательство по В.В.Каврайскому. Н.К.Разумовский „Проекции" Л.6.

описав из Z' параллель радиусом в ρ°. Соединим точки Z' и P прямой, а через точку O проведем плоскость перпендикулярно к линии PZ' которая с меридианом ZPZ' пересечется по линии $\Sigma\Sigma'$. Через PZ' и точки M_o и N_o проведем плоскости PM_oZ' и PN_oZ' которые будут перпендикулярны к плоскости $\Sigma\Sigma'$. На круге K эти плоскости дадут точки M и N. Так как $OP = OZ'$ (как радиусы шара) то точки P и Z' лежат



Черт. 51.

симметрично относительно плоскости $\Sigma\Sigma'$ (т.е. одна из них является зеркальным отражением другой). Так как плоскость $\Sigma\Sigma$ проходит через центр шара, то и шар ею разрезан на две симметричные части.

При отражении верхней части шара и в плоскости $\Sigma\Sigma'$ 1) все ее точки совместятся с точками нижнего полушария 2) точка P совместится с Z' 3) круг K_o совместится с кругом K (так как центры совпадут, а сферические радиусы одинаковы и равны ρ°), 4) точки M_o и N_o совместятся с M и N, так как они лежат соответственно в плоскостях PM_oZ' и PN_oZ', перпендикулярных к $\Sigma\Sigma'$. Следовательно, дуга M_oN_o = MN. Так как центр окружности K в полюсе Z', то она при проектировании даст параллель K', а дуга MN спроектируется равной ей $m'n'$, т.е. $MN = m'n'$. Отсюда $M_oN_o = m'n'$; но так как дуга $m'n'$ измеряется центральным углом при точке O, то $M_oN_o = m'n' = \angle m'On'$ что и требовалось доказать.*

Для нас особенно важен следующий частный случай: когда $\rho = 90°$, то малый круг превращается в большой, а круг K' превращается в круг проекций. Следовательно в этом случае правило нахождения величины дуги можно формулировать так:

Чтобы найти величину какой либо дуги большого круга AB, заданной в стереографической проекции дугой ab (черт.47) нужно полюс дуги p, (который очевидно, есть сферический центр заданной окружности большого круга, соединить с точками a и b, продолжить до пересечения с окружностью проекций в точках a' и b'. Дуга $a'b'$ измеряется тем же числом градусов, что и дуга AB на шаре.

З а д а ч а 33. Даны два направления OA и OB проекциями a и b. Найти угол между ними (черт.47).

I + II. Проводим через a и b дугу большого круга, как об'яснено в задаче №32. При этом определится также и полюс дуги ab – p (черт.47). Проводим линию pa и pb до пересечения с окружностью проекций в a' и b'. Проводим прямые $a'O$ и $b'O$ и угол $a'Ob'$ измеряем транспортиром.

III. Когда найдем по предыдущему точки a' и b' (таб. VI), то прямо просчитываем по кругу проекций число градусов заключающихся в дуге $a'b'$. Для данного примера дуга $AB = 68\frac{1}{2}°$.

З а д а ч а 36. Найти середину дуги ab? (см.черт. 47 и таб.VI). Поступаем, как в предыдущей задаче, найдем дугу $a'b'$. Делим ее пополам и середину m' соединяем с p. Точка m пересечения луча pm' с дугой ab – даст нам решение задачи.

*Если прямые pm и pn продолжить в обратную сторону [черт.50], то дуга $m''n''$ также равна M_oN_o. Однако это свойство мы оставим без доказательства.

§3. Кристаллооптические задачи.

З а д а ч а 34. Даны координаты двух плоскостей эллипсоида, измеренные на столике Е.С.Федорова: $\lambda = 86^\circ$ $\rho = 26\frac{1}{2}^\circ$ влево (N_g - полюс) и $\lambda = 7\frac{1}{2}^\circ$, $\rho_2 = 20^\circ$ вправо (N_m - полюс). Нанести эллипсоид на сетку.

Эту задачу мы решали на сетке Вульфа (зад.21). Решим ее теперь с набором III (таб.VII).

III. Отсчитав по часовой стрелке 86°, отмечаем оба конца меридиана 86° и прочерчиваем меридиан ему перпендикулярный, поворачиваем отметкой вверх и от центра влево отсчитываем по перпендикулярному меридиану кривизну дуги $26\frac{1}{2}^\circ$ а от правого края - $26\frac{1}{2}$ к центру и найдем ось N_g. Отмечаем $7\frac{1}{2}^\circ$, находим концы меридиана, а также к нему перпендикулярного; поворачиваем отметку $7\frac{1}{2}^\circ$ вверх, отсчитываем кривизну плоскости в п р а в о 20°, а слева находим полюс N_m. Пересечение дуг определит ось N_p, которая будет полюсом дуги $N_g N_m$. Проводим (задача 32) через $N_g N_m$ дугу большого круга.

З а д а ч а 35. К условию задачи 34 добавлено, что угол оптических осей $2V = 76^\circ$ и что биссектриса этого угла - есть ось N_p. Построить выходы осей в проекции.

I. (черт.34). Через ось эллипсоида N_m, являющуюся полюсом плоскости $N_g N_p$, в которой должны лежать оптические оси, проводим прямую $N_m N_p$ до пересечения с кругом проекции в точке p. От точки p в обе стороны откладываем по $76 : 2 = 38^\circ$ и полученные точки a_1 и a_2 соединяем с N_m. Пересечения линии $N_m a_1$ и $N_m a_2$, с дугой $N_g N_p$ даст проекции оптических осей A_1 и A_2.

§4. Вращение на сетке проф. Е.С.Федорова.

З а д а ч а 36. Полярный кристаллический пучек нанесен на сетку. После этого, оставляя плоскость проекций неизменною, мы повернули пучек: а) вокруг оси проекций по часовой стрелке на угол 27°,затем б)вокруг диаметра круга проекций 90° - 270° сверху вперед на 86° и наконец, с)вокруг вертикального диаметра круга проекции 0 - 180° справа вперед на 56°.Найти проекцию пучка после всех этих поворотов.

Задачу эту мы умеем решить на сетке Вульфа. Здесь мы рассмотрим ее решение на сетке Федорова (на сетке Белянкина без трафарета Пенфильда ее решить нельзя).

III. 1-ый с л у ч а й - дана точка M_1(355°,38°) - (таб.VIII).

а)При вращении шара около оси О на 27° точка M_1(проекция которой m_1 есть на чертеже) пойдет по параллели в 38° на угол 27° и придет в точку m_1' (22°,38°).

b)При вращении шара около оси 270° - 90° сверху вперед (т.е.так,что нулевой диаметр будет подниматься).Точка M_1 будет скользить по дуге малого круга с центром в точке 90°,т.е.по параллелям относительно оси 270° - 90° и пройдет по ней 86°,т.е.пересечет 86 градусных меридианов,проходящих через ось 270° - 90°.Но на сетке Е. С. Федорова эти вспомогательные параллели и меридианы имеются нанесенные: параллели через 5°,а меридианы через 10°.Точка m_1 лежит между 75 и 80 параллелью приблизительно на 77-ой проводим ее пунктиром и отсчитываем по меридианам 86°.Найдем точку m_1'' (163°,51½°).

с)При вращении шара около оси 0 - 180° (так,что конец в 90° будет подниматься) точка M_1 будет двигаться по дуге малого круга радиуса 180° M_1'',с центром в точке 180°, т.е.по параллели относительно полюса 180°,т.е.по параллели вспомогательной сети,нанесенной на сетке.

Точка m_1'' лежит между 40 и 45 параллелями,приблизи - тельно на 42.Проведем ее пунктиром и пересчитаем по меридианам влево 56°,получим точку m_1'''(207°,58°) представляющую положение точки M_1 после всех поворотов.

2-ой с л у ч а й: M_2(98°,48°)(таб.VIII).Проекция точки M_2 - m_2 есть на чертеже.

а)Проекция m_2' после вращения около оси О найдется по прежнему. Ее координаты $Ш_2'(125°, 48°)$.

b) Точка $Ш_2'$ лежит между 50 и 55 параллелью от полюса 90°, примерно на 52. Проведем ее пунктиром. Нам нужно точку $Ш_2'$ вести книзу на 86°, а между тем, пройдя 57° точка придет на экватор круга проекций и затем уйдет в нижнюю полусферу. По правилу Вульфа мы ее теперь должны проектировать из точки Z и она следовательно пойдет по той же параллели обратно, пройдя еще от края сетки 86° - - 57° = 29°. Значит после второго вращения точка придет в $Ш_2''(139°, 112°)$ - (крестик).

c) При повороте около оси 180° - 0 точка $Ш_2''$ будет двигаться по параллели второй вспомогательной сетки, относительно полюса 180, именно по параллели в 45°. Когда точка верхней полусферы (например, $Ш_1''$) пойдет справа налево, точка $Ш_2''$ пойдет слева направо. Пройдя 32° точка $Ш_2''$ придет на экватор сетки и далее перейдет в верхнюю полусферу, где мы ее опять должны проектировать из Z'. Теперь справо налево по той же 45-ой параллели она пройдет 56° - 32° = 24°. Окончательно она займет положение $Ш_2'''(137°, 73°)$.

Задача эта имеет частое применение при кристаллографических исследованиях. Ее можно решать и без сетки, точно строя все параллели и меридианы. Из сеток же следует предпочесть работу на сетке Вульфа, которая не менее точна, чем непосредственное построение.

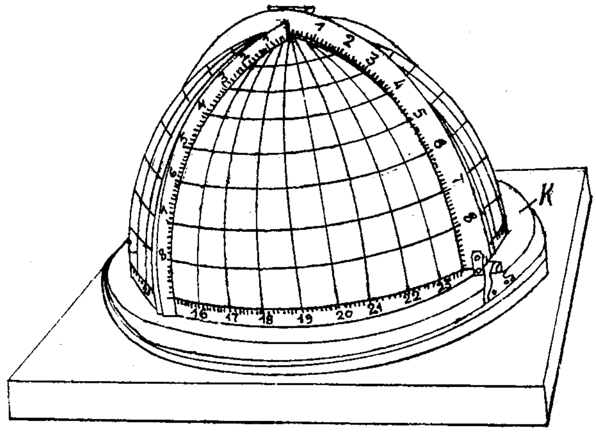
§5. Гемисфера проф. В. В. Никитина.

Гемисфера В. В. Никитина* (черт. 52) представляет собой фарфоровое полушарие, с нанесенной на нем через 10° глобусной сетью и снабженное градусными делениями на экваторе от 0 до 360° через 1°; на фарфоровую полусферу надевается пришлифованное к основанию кольцо K, к которому неподвижно укреплена круговая, проходящая через полюс, линейка с делениями от 0 (у полюса) до 90° в обе стороны; поперек неподвижной имеется подвижная

*Зап. Горн. Инст. т. I в I стр. 50.

линейка вращающаяся на шарнирах.

Полусферу В.В.Никитина можно рассматривать как модель шара проекций. Она делает излишним построение стереографических проекций, так как непосредственно дает выходы лучей кристаллического пучка на шаре. Гемисфера значительно упрощает решения задач и делает это решение весьма наглядным. В этом ее преимущество.



Черт.52.

Недостатки ее по сравнению с сеткой таковы. 1) громоздкость и дороговизна прибора, 2) не плоское изображение, 3) необходимость стирать обыкновенной резинкой все сделанные построения, и поэтому невозможность сохранять чертежные результаты исследования.

Гемисфера позволяет:

1) по координатам находить точки;

2) проводить всевозможные дуги большого круга;

3) проводить малые круги и пр.

З а д а ч а 37. Построить точку A (70°, 30°) на гемисфере.

Вращая кольцо, совместим край неподвижной линейки с делением 70° на экваторе. На неподвижной линейке от полюса отсчитываем 30° и намечаем точку A.

З а д а ч а 38. Через нанесенные точки на гемисфере провести дугу.

Вращая кольцо K и наклоняя одновременно подвижную линейку, добиваемся, чтобы ее край с делением проходил через точки A и B. Прочерчиваем дугу AB. Если нужно знать координаты этой дуги,то отсчитываем внизу у неподвиж - ной линейки λ ,а по самой неподвижной линейке - наклон середины дуги ρ, отмечая вправо он или влево.

З а д а ч а 39. Через точку A провести окружность малого круга,радиуса α°.

Вращая кольцо приведем неподвижную линейку в совмещение с точкой A,отложим в одну какую либо сторону α° и отмечаем точку A_o.Затем обыкновенным циркулем проводим круг радиуса AA_o.

С Л О В А Р Ь

ТЕРМИНОВ, УПОТРЕБЛЯЕМЫХ В ТЕКСТЕ
(в алфавитном порядке).

АЗИМУТ - угол, составленный направлением на север и направлением на точку (или по данной линии), отсчитанный по часовой стрелке.

ГЕМИСФЕРА - проф. Никитина - см. стр. 86 и черт. 52.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ОБРАЗ - точка, линия, плоскость, или какая либо совокупность из этих геометрических элементов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА - совокупность точек или других геометрических образов, закономерно выделенных из ряда других возможных.

ГНОМОКОРРЕЛЯЦИЯ - замена ЛУЧА - перпендикулярной к нему плоскостью, и наоборот - замена плоскости нормалью к ней.

ГНОМОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ - линейная проекция нормалевого пучка.

ГНОМОСТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ проекция - стереографическая проекция нормалевого пучка.

ГОМОЛОГИЯ - связь между двумя однородными геометрическими системами, состоящими из одинаковых элементов - (точек или других).

ГРАДУСНАЯ СЕТЬ - совокупность меридианов и параллелей на шаре проведенных через заданный интервал (2°.5°,10°).

ГРАММАСТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ - то же, что и стереографическая проекция.

ГРАНЕВЫЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЙ ПУЧЕК - совокупность плоскостей и прямых, проходящих через одну точку пространства и параллельных соответственным граням и ребрам изучаемого кристалла.

ДОЛГОТА - полярная координата - двугранный угол между меридианом точки и начальным меридианом.

ИДЕАЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК - (= идеальный кристалл) многогранник, в который может быть вписан шар, касающийся всех граней.

ИНДЕКС - на восковке - черточка, поставленная на восковке у деления 90° и служащая для отсчета долготы.

КОРРЕЛЯЦИЯ - связь между разнородными геометрическими системами (т.е. состоящими из различных элементов - одна из точек, другая из векторов - и пр.).

КОСОУГОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ - перспектива из безконечно удаленной точки на плоскость под косым углом к последней.

ЛИНЕЙНАЯ ПРОЕКЦИЯ - перспектива пучка линий и плоскостей на плоскость, находящуюся от центра пучка на расстоянии R = 10 см. из центра пучка.

ЛИНИЯ ПАДЕНИЯ пласта - линия наибольшей крутизны в сторону спуска.

ЛИНИЯ ПРОСТИРАНИЯ пласта - линия, лежащая в плоскости пласта и горизонтальная.

МЕРИДИАН - плоскость большого круга, проходящего через полюс координат.

НОНСПЕКТИВА - гомология при построении которой нельзя найти пучка лучей, переносящих проектируемый образ на плоскость или поверхность

НОРМАЛЕВЫЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЙ ПУЧЕК (короче: нормалевый пучек) - совокупность проходящих через одну точку (центр пучка) нормалей к граням изучаемого кристалла.

ОКТАНТ - сферический треугольник, у которого все углы и все стороны равны 90°.

ОПТИЧЕСКИЕ ОСИ в эллипсоиде - направления,перпендикулярные к круговым сечениям эллипсоида.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ - перспектива на плоскость из бесконечно удаленной точки лучами, перпендикулярно плоскости проекций.

ПАРАЛЛЕЛЬ - окружность малого круга со сферическим центром в полюсе координат.

ПЕРСПЕКТИВА - гомология,при которой для построения проекции берется пучек лучей,и из центра пучка исходный образ проектируется лучами на плоскость или какую либо поверхность.

ПОЛЯРНОЕ РАССТОЯНИЕ - полярная координата - угол между полюсом и точкой.

ПРОЕКТИВНАЯ ПАРА - два геометрические образа,связанные геометрическим построением.

ПРОЕКЦИЕЙ - какого либо геометрического образа или фигуры могут быть названы всякий другой образ или фигура,полученные из исходного при помощи заданного геометрического построения.

СКЛОНЕНИЕ ДУГИ - кратчайшее полярное расстояние до дуги.Дополняет до 90° полярное расстояние нормали к плоскости дуги.

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ - перспектива поверхности шара на плоскость большого круга π из точки лежащей на поверхности шара в полюсе круга π.

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ СЕТКА - стереографическая проекция градусной сети.

СФЕРОКОРРЕЛЯЦИЯ - замена пучка плоскостей и линий -дугами и точками пересечения данных плоскостей и линий с поверхностью шара данного радиуса,описанного около центра пучка.

ТРАФАРЕТ ПЕНФИЛЬДА - см.стр.75.

УГЛОВОЙ ЦИРКУЛЬ - проф. А.К.Болдырева см.стр.74-75 и черт.45.

ШИРОТА - угол наклона точки к экватору - дополняет полярное расстояние до 90°.

ЭЛЛИПСОИД УПРУГОСТИ - (или эллипсоид показателей преломления) - эллипсоид, оси которого пропорциональны показателям преломления данного вещества.

--------00000-------

При составлении настоящего курса мною использованы следующие руководства:

1. А.К.Болдырев - Учение о кристаллографических проекциях in.4° 98 стр.1922 г.(рукопись) 41 черт.+VII таб.

2. А.В.Шубников - Практические занятия по геометрической кристаллографии со стереографической сеткой in. 8 стр.65 + 5 + X таб.Изд.Книжн.Бюро Уральского Горного Института.

3. Г.В.Вульф и А.В.Шубников - Практический курс геометрической кристаллографии со стереографической сеткой.in 8° стр.1 - 60 + атлас в 10 таб.Госиздат 1924.

4. В.В.Каврайский - Картография.1920 г.(рукопись).

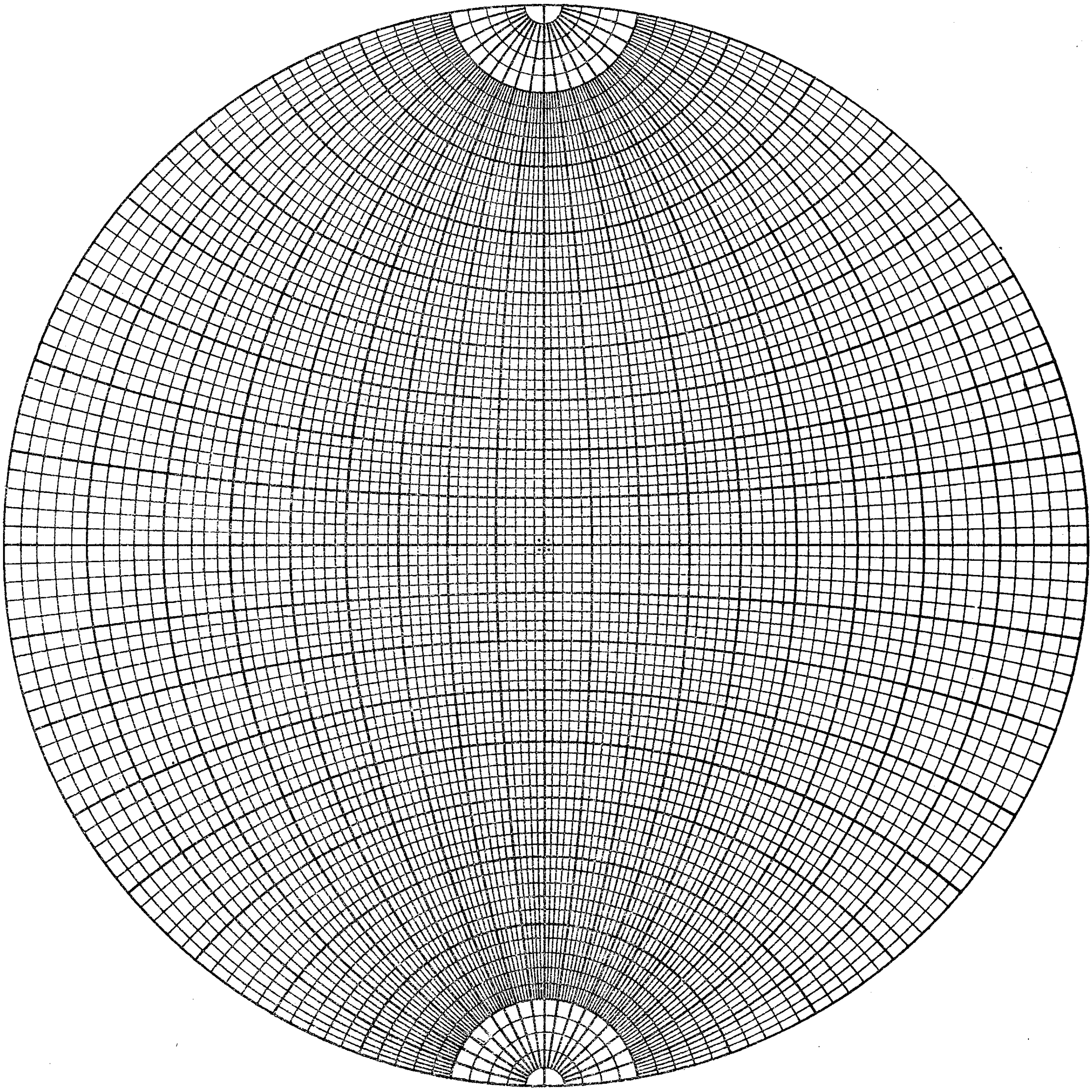
5. С.М.Романов - Учение о кристаллографических проекциях ч.1 Теория проекции in 4 стр.100. Чертежей 60. Таблиц I - VII + приложение.Краткий задачник по проекциям стр.1 - 129 in 4°.

6. Е.Е.Флинт - Практикум по кристаллографии под редакцией Г.В.Вульфа.in 8° с 1 - 73 + 15 таб.Мос.Ак.Изд.М. 1924.

---------00000-------

О Г Л А В Л Е Н И Е.

1591



СЕТКА ВУЛЬФА.

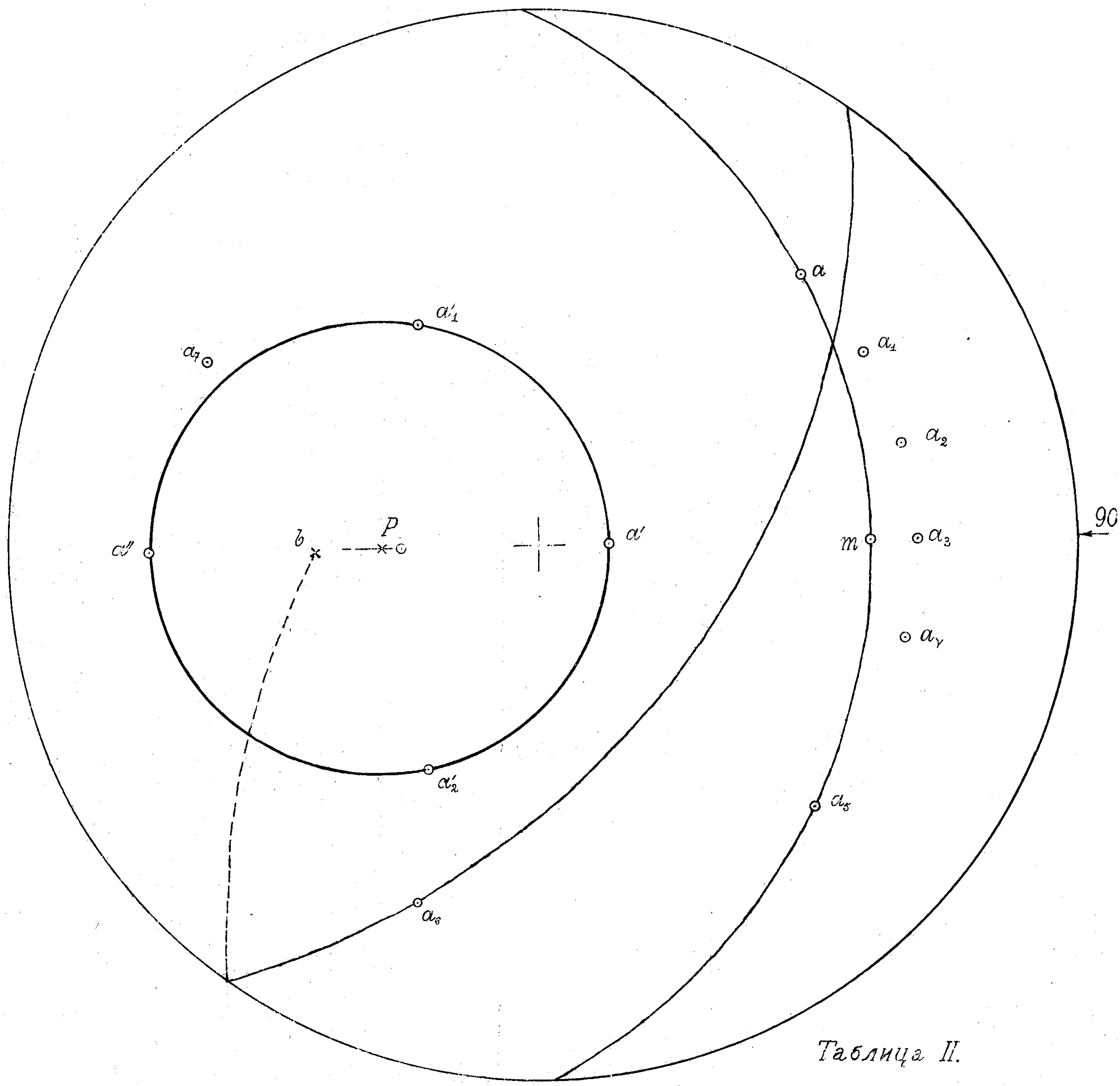


Таблица II.

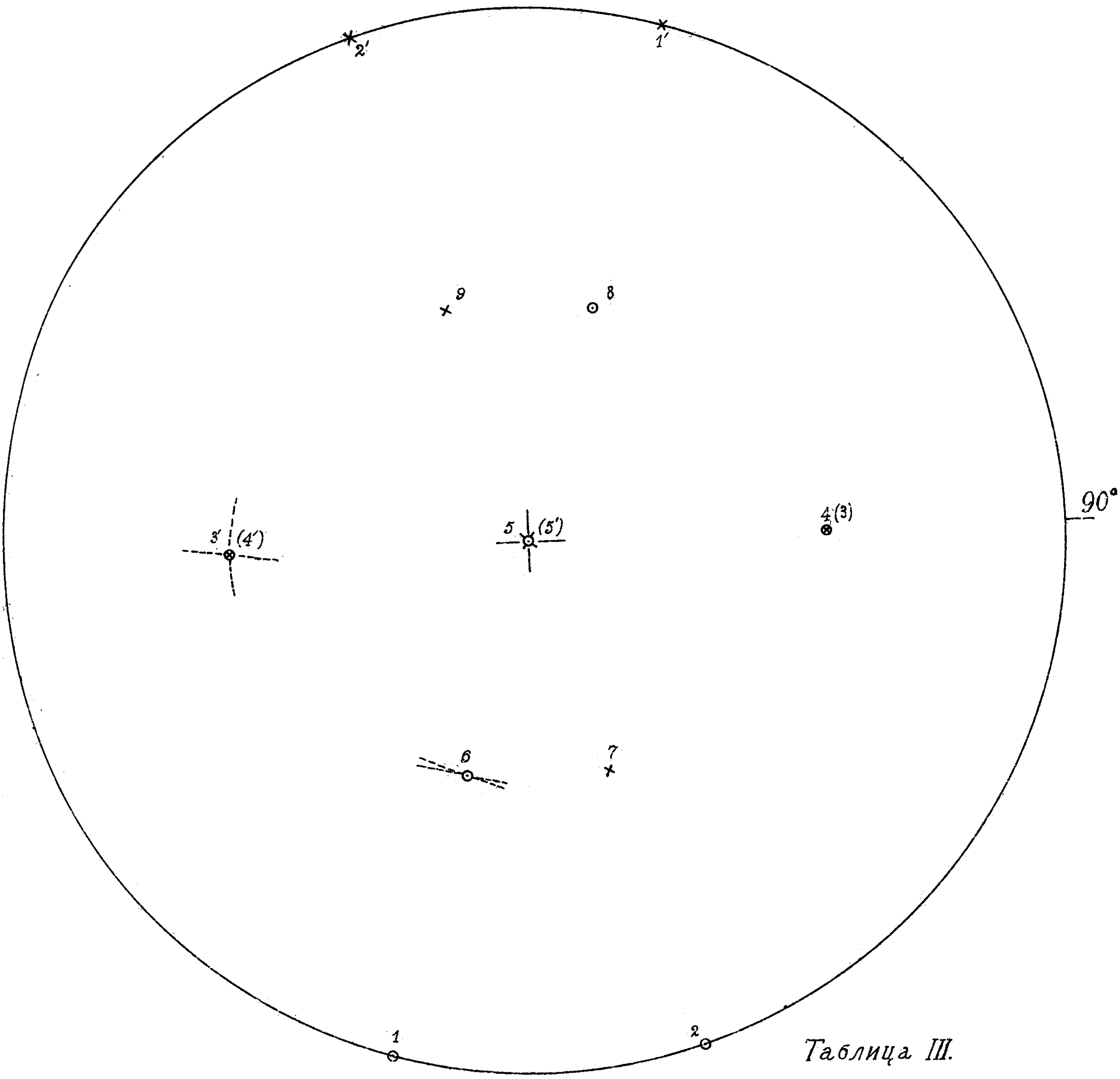


Таблица III.

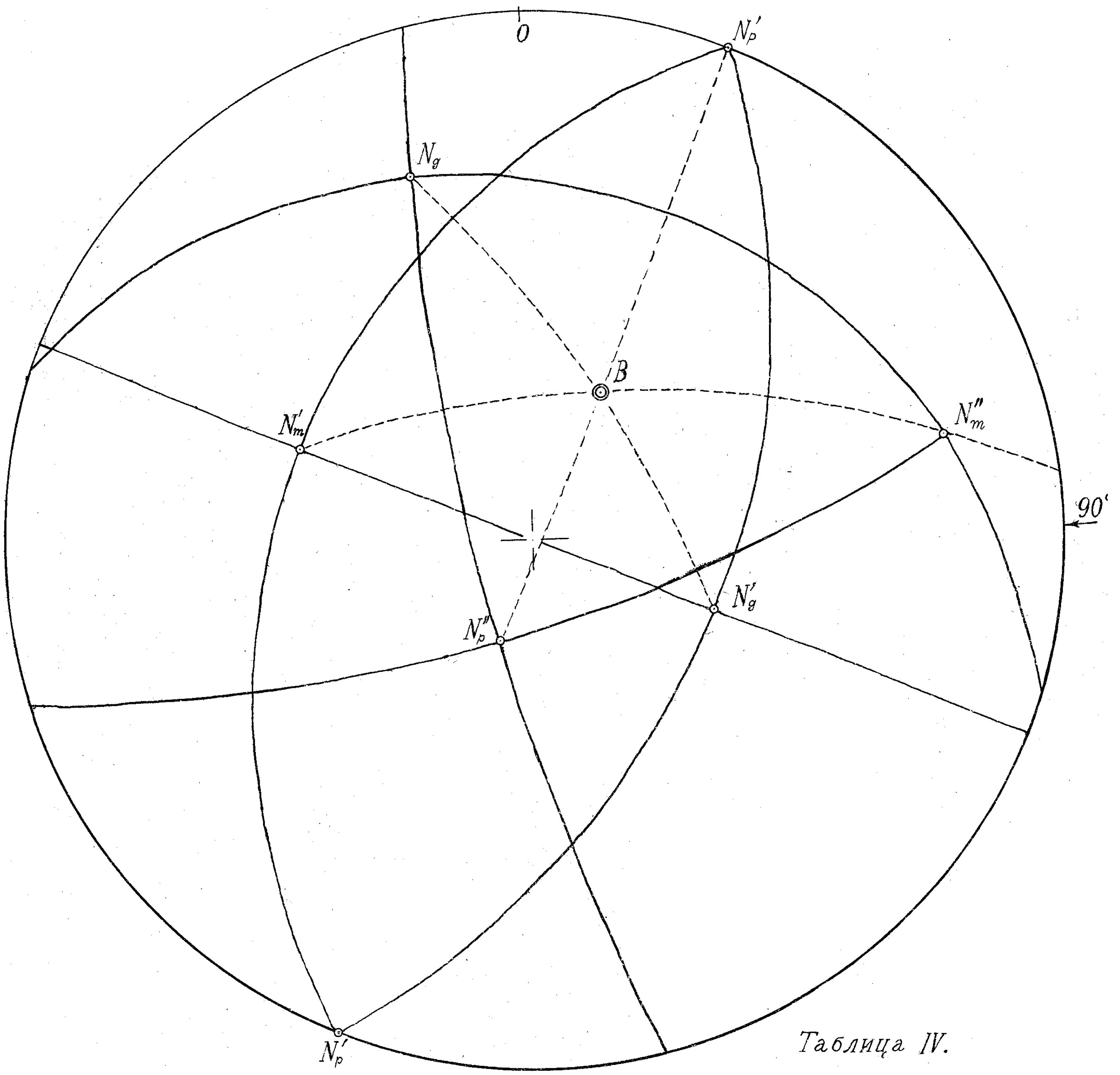


Таблица IV.

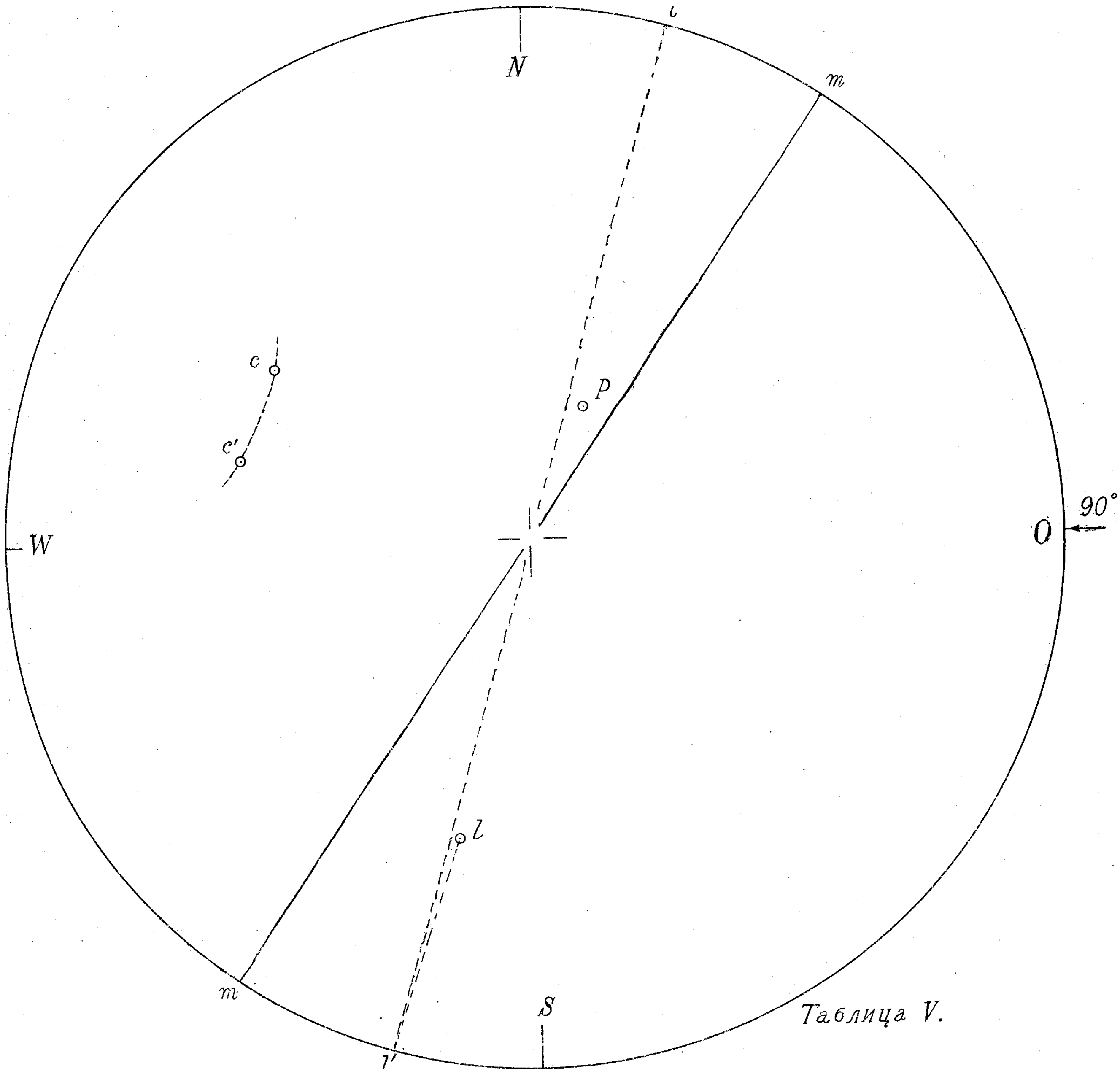
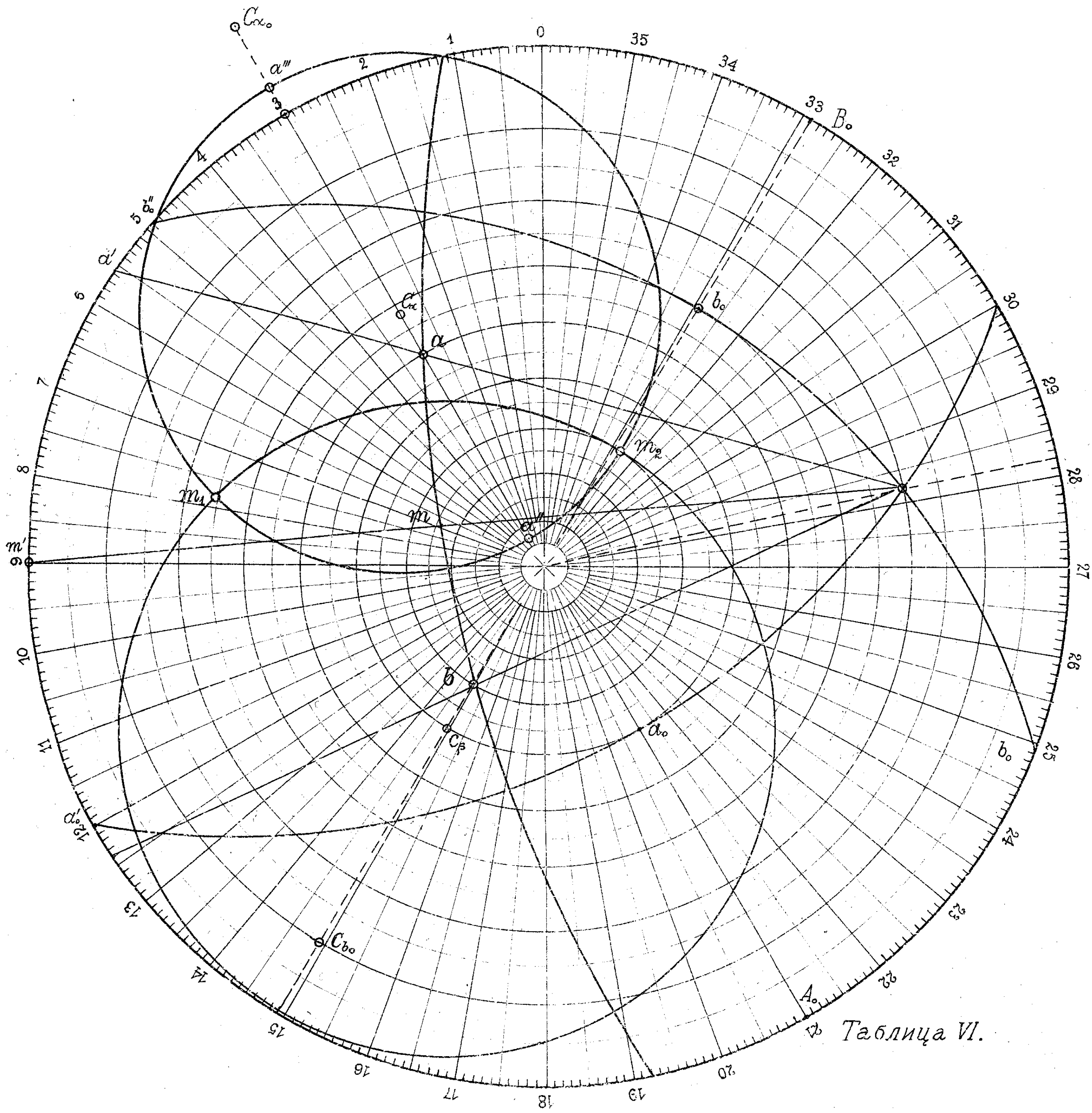


Таблица V.



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
a
b
m
m'
m_1
m_2
a_o
b_o
A_o
B_o
C_{α_o}
C_β
C_{b_o}

Таблица VI.

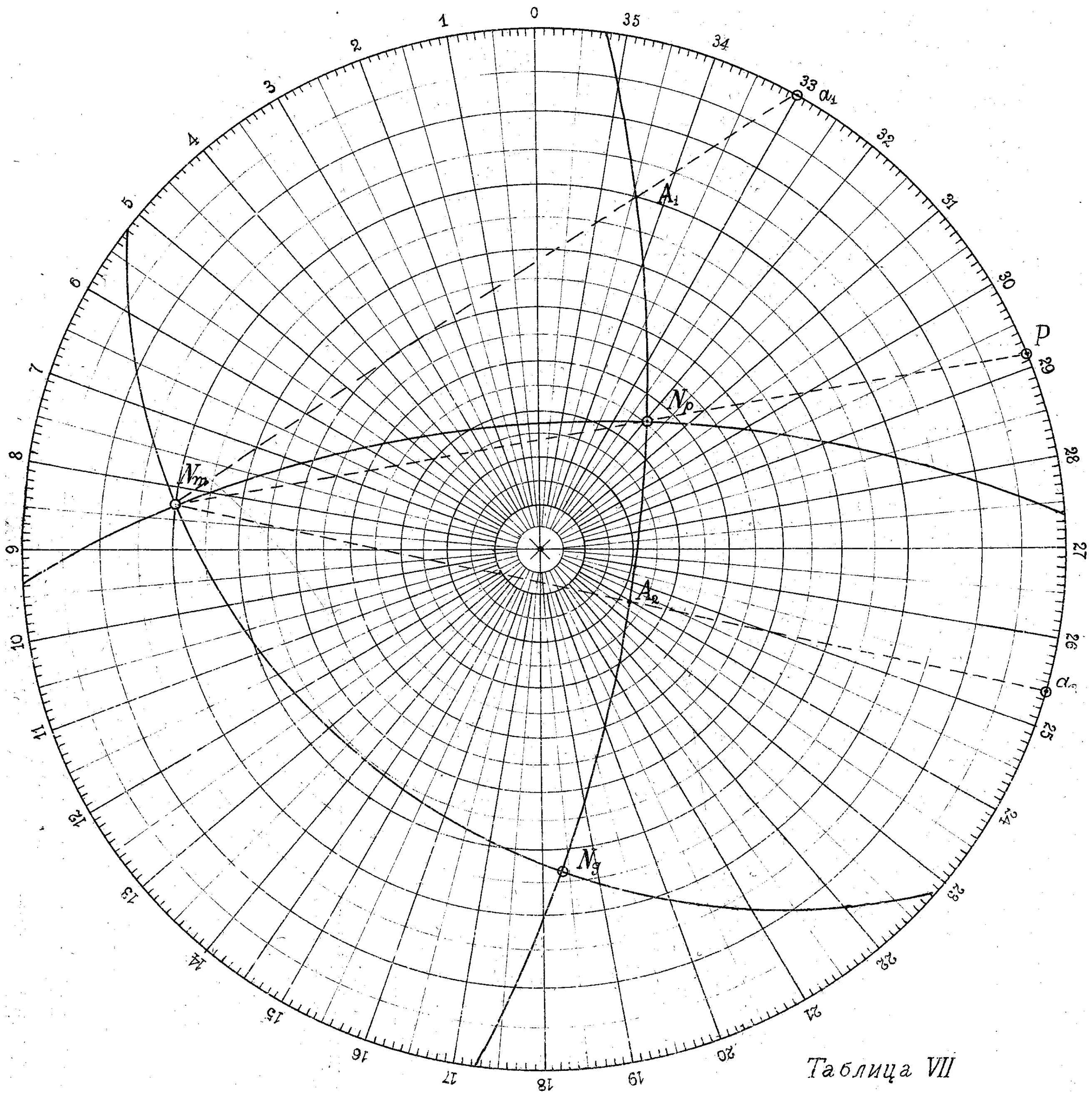

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
a_1
A_1
P
N_P
N_m
A_2
a_2
N_g

Таблица VII

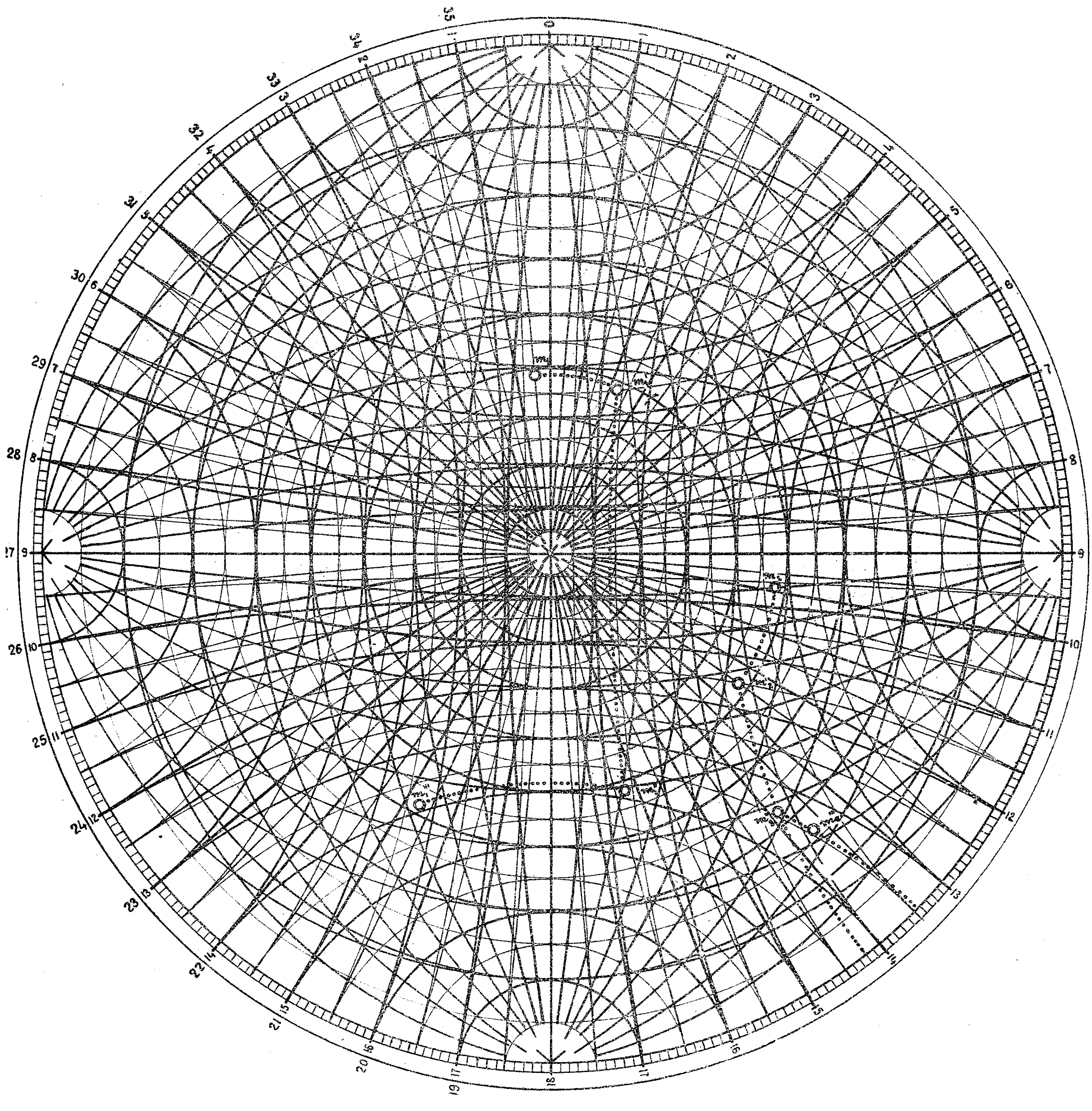


ТАБЛИЦА VIII.